

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД
МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

6 класс

6 заданий по 5 баллов
(максимум 30 баллов)

продолжительность 40 минут



olympo.ru



[@olymp_mo](https://www.instagram.com/olymp_mo)



[/olympo](https://www.facebook.com/olympo)



[/olympo](https://vk.com/olympo)

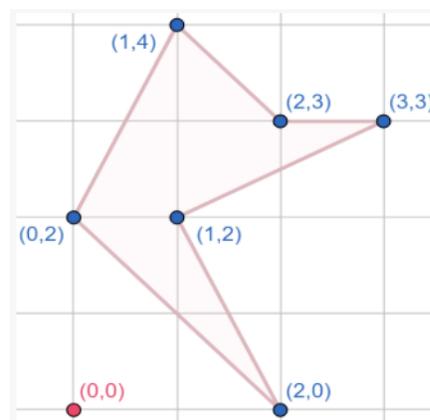


[@olympo](https://www.telegram.com/@olympo)

Задание №1. Многоугольник

Вариант 1 задания №1

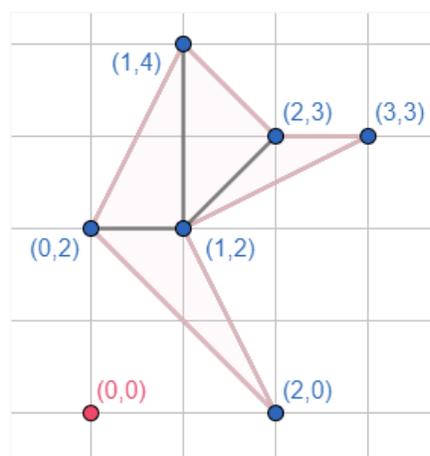
Точки $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,2)$, $(3,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$ на координатной плоскости последовательно соединили так, что получился многоугольник. Укажите площадь этого многоугольника.



Решение:

Соединим отрезками точки $(0,2)$ и $(1,2)$, а также точки $(1,2)$ и $(1,4)$ и точки $(1,2)$ и $(2,3)$.

Тогда фигура разобьется на четыре треугольника с площадями 1, 1, 1 и 0,5. (Они либо прямоугольные (то есть половина площади прямоугольника), либо получаются вырезанием прямоугольного треугольника из другого прямоугольного треугольника.) В сумме получается 3,5.

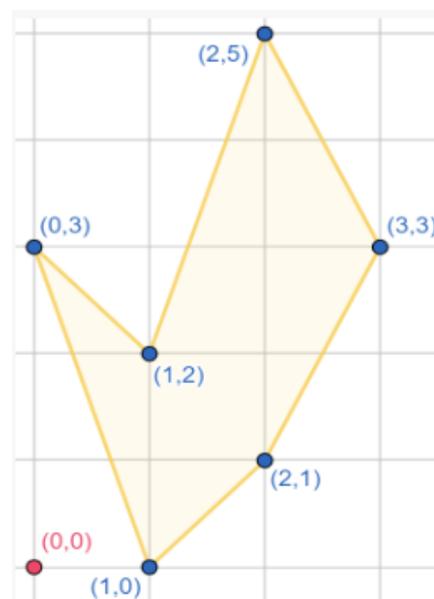


Ответ: 3,5



Вариант 2 задания №1

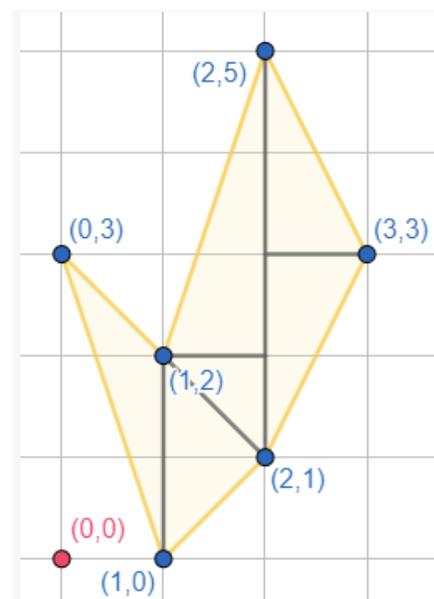
Точки $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,3)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,3)$ на координатной плоскости последовательно соединили так, что получился многоугольник. Укажите площадь этого многоугольника.



Решение:

Соединим отрезками точки $(1,0)$ и $(1,2)$, точки $(1,2)$ и $(2,1)$, точки $(2,3)$ и $(3,3)$, а также точки $(2,1)$ и $(2,5)$, точки $(1,2)$ и $(2,2)$.

Тогда фигура разобьётся на шесть треугольников с площадями 1, 1, 0,5, 1,5, 1 и 1. (Они либо прямоугольные (то есть половина площади прямоугольника), либо получаются вырезанием прямоугольного треугольника из другого прямоугольного треугольника.) В сумме получается 6.

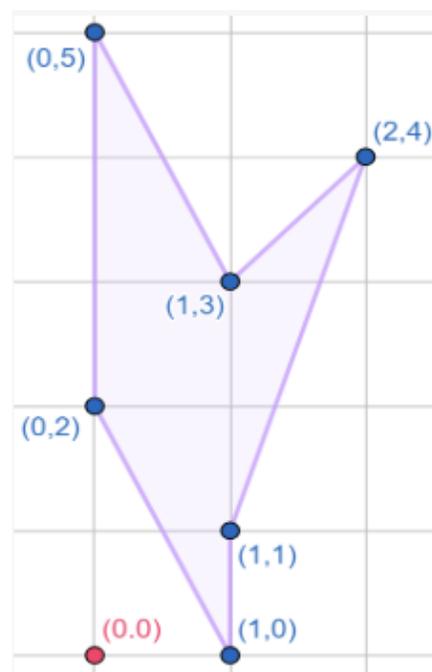


Ответ: 6



Вариант 3 задания №1

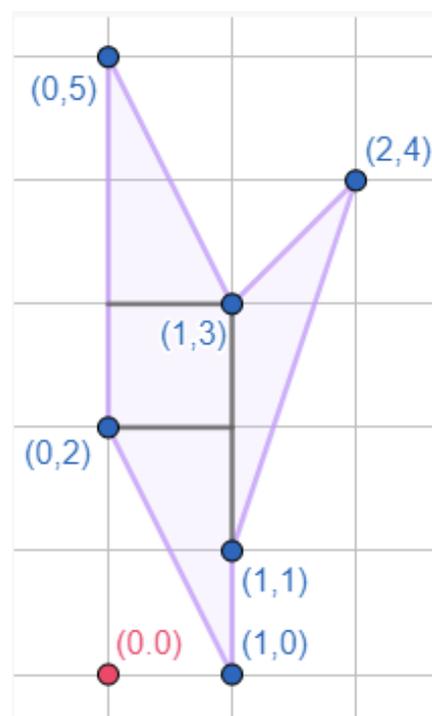
Точки $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(1,3)$, $(0,5)$, $(0,2)$ на координатной плоскости последовательно соединили так, что получился многоугольник. Укажите площадь этого многоугольника.



Решение:

Соединим отрезками точки $(1,0)$ и $(1,3)$, а также точки $(0,3)$ и $(1,3)$ и точки $(0,2)$ и $(1,2)$.

Тогда фигура разобьется на единичный квадрат и три треугольника с площадями 1, 1, 1 (они либо прямоугольные (то есть половина площади прямоугольника), либо получаются вырезанием прямоугольного треугольника из другого прямоугольного треугольника.). В сумме получается 4.



Ответ: 4



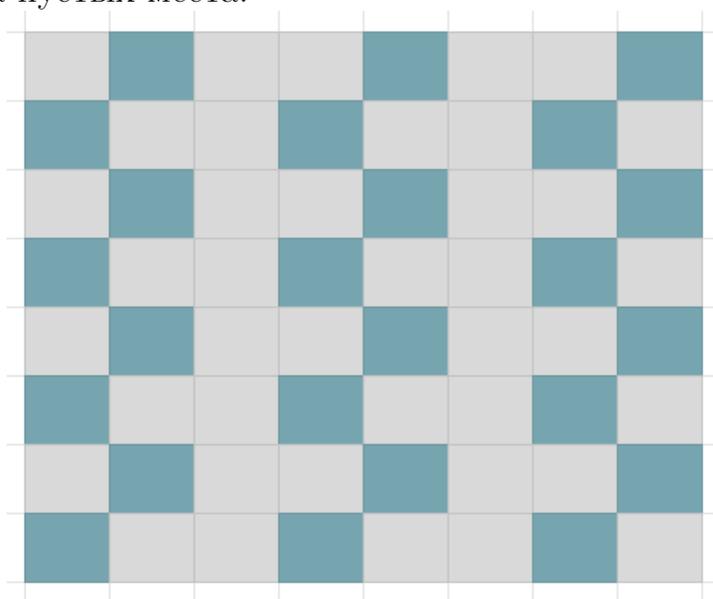
Задание №2. Кинотеатр

Вариант 1 задания №2

В зрительном зале кинотеатра ровно 8 рядов, в каждом ровно по 8 мест, причём все места образуют прямоугольник 8 на 8. По причине эпидемиологических ограничений, запрещается сидеть на одном ряду рядом или через одно место. Также запрещено сидеть на местах с одним и тем же номером в соседних рядах (т.е. запрещено сидеть на местах, расположенных непосредственно друг за другом: нумерация во всех рядах одинакова). В то же время любой зритель обязан занимать одно из мест в зале (и, конечно, на одном месте может сидеть не более одного зрителя). Какое максимальное число зрителей может одновременно присутствовать на сеансе?

Решение:

В группе из двух или трех мест подряд в одном ряду не может сидеть более одного человека. Ряд из 8 мест можно разбить на три такие группы (две по три и два.) Значит, всего можно посадить не более $3 \cdot 8 = 24$ человек. Покажем, как посадить ровно 24. В нечетных рядах пусть зрители займут места 1,4,7, а в четных рядах 2,5,8. Можно заметить, что никто в соседних рядах не сидит на одном месте, и в одном ряду между двумя зрителями два пустых места.



Ответ: 24 зрителя

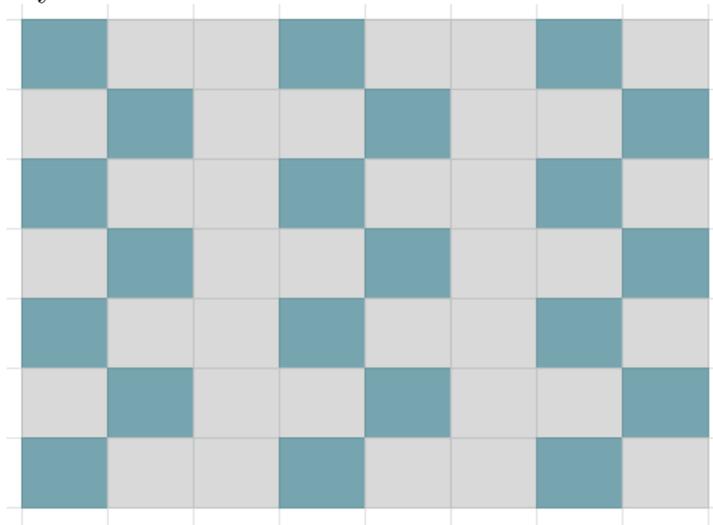


Вариант 2 задания №2

В зрительном зале кинотеатра ровно 7 рядов, в каждом ровно по 8 мест, причём все места образуют прямоугольник 7 на 8. По причине эпидемиологических ограничений, запрещается сидеть на одном ряду рядом или через одно место. Также запрещено сидеть на местах с одним и тем же номером в соседних рядах (т.е. запрещено сидеть на местах, расположенных непосредственно друг за другом: нумерация во всех рядах одинакова). В то же время любой зритель обязан занимать одно из мест в зале (и, конечно, на одном месте может сидеть не более одного зрителя). Какое максимальное число зрителей может одновременно присутствовать на сеансе?

Решение:

В группе из двух или трех мест подряд в одном ряду не может сидеть более одного человека. Ряд из 8 мест можно разбить на три такие группы (две по три и два). Значит, всего можно посадить не более $3 \cdot 7 = 21$ человека. Покажем, как посадить ровно 21. В нечетных рядах пусть зрители займут места 1,4,7, а в четных рядах 2,5,8. Можно заметить, что никто в соседних рядах не сидит на одном месте, и в одном ряду между двумя зрителями два пустых места.



Ответ: 21 зритель

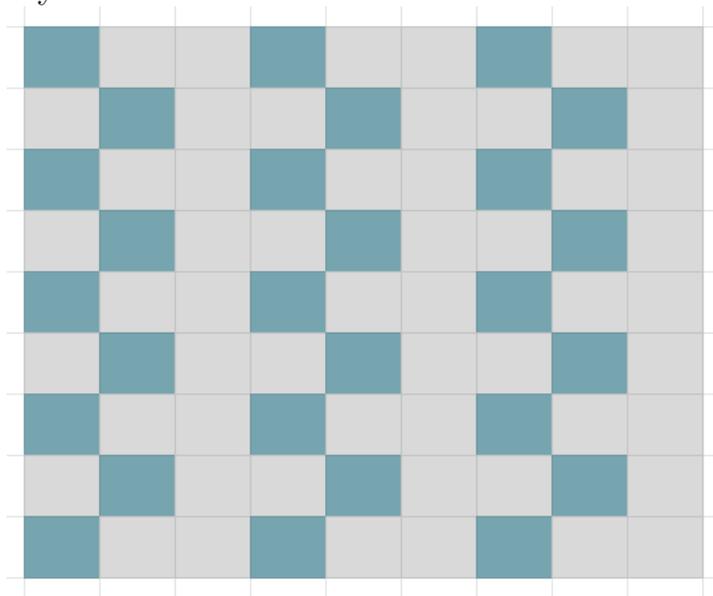


Вариант 3 задания №2

В зрительном зале кинотеатра ровно 9 рядов, в каждом ровно по 9 мест, причём все места образуют прямоугольник 9 на 9. По причине эпидемиологических ограничений, запрещается сидеть на одном ряду рядом или через одно место. Также запрещено сидеть на местах с одним и тем же номером в соседних рядах (т.е. запрещено сидеть на местах, расположенных непосредственно друг за другом: нумерация во всех рядах одинакова). В то же время любой зритель обязан занимать одно из мест в зале (и, конечно, на одном месте может сидеть не более одного зрителя). Какое максимальное число зрителей может одновременно присутствовать на сеансе?

Решение:

В группе из двух или трех мест подряд в одном ряду не может сидеть более одного человека. Ряд из 9 мест можно разбить на три такие группы (три по три). Значит, всего можно посадить не более $3 \cdot 9 = 27$ человек. Покажем, как посадить ровно 27. В нечетных рядах пусть зрители займут места 1,4,7, а в четных рядах 2,5,8. Можно заметить, что никто в соседних рядах не сидит на одном месте, и в одном ряду между двумя зрителями два пустых места.



Ответ: 27 зрителей



Задание №3. Старая книга

Вариант 1 задания №3

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Маша нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 187, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с БОльшим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 718. Следовательно, число страниц равно $718 - 186 = 532$ (мы вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 186), а число листов вдвое меньше: $532 : 2 = 266$.

Ответ: 266 листов

Вариант 2 задания №3

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Юля нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 387, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с БОльшим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 738. Следовательно, число страниц равно $738 - 386 = 352$ (мы



вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 386), а число листов вдвое меньше: $352 : 2 = 176$.

Ответ: 176 листов

Вариант 3 задания №3

Вы помните бумажные книги? Особенно старые... каковы они на ощупь, их запах, присутствие чего-то незримого, но вечного... Кстати, в бумажных книгах на каждом листе находятся две страницы.

Катя нашла на чердаке кусок из старой (бумажной!) книги, первая его страница имеет номер 365, а последняя записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько ЛИСТОВ в этом куске?

Решение:

Поскольку первая страница куска нечётная, последняя должна быть чётной и с большим номером. Из тех же цифр можно составить только один номер, удовлетворяющий условиям: 536. Следовательно, число страниц равно $536 - 364 = 172$ (мы вычитаем только те страницы, которых не хватает – таковых 364), а число листов вдвое меньше: $172 : 2 = 86$.

Ответ: 86 листов



Задание №4. Переставить или отнять

Вариант 1 задания №4

На доске написано число, над которым (возможно, неоднократно) производятся действия, описанные ниже. За одно действие можно отнять от числа 27 либо переставить цифры в числе произвольным образом (при этом мы разрешаем ставить цифру 0 на первое место; например, число 0456 – это то же число, что и 456). В результате действия старое число стирается, а вместо него записывается новое. Изначально на доске написано число 2020. Какое минимальное положительное число можно получить такими действиями?

Решение:

При перестановке цифр и при вычитании 27 сохраняется остаток от деления на 9. Исходное число даёт остаток 4 при делении на 9 (сумма цифр $2+0+2+0=4$), поэтому получить число меньше, чем 4, не удастся.

Получить ровно 4 можно так: сначала переставляем цифры, чтобы получилось число 220, потом 8 раз вычитаем 27, получаем 4.

Ответ: 4

Вариант 2 задания №4

На доске написано число, над которым (возможно, неоднократно) производятся действия, описанные ниже. За одно действие можно отнять от числа 18 либо переставить цифры в числе произвольным образом (при этом мы разрешаем ставить цифру 0 на первое место; например, число 0456 – это то же число, что и 456). В результате действия старое число стирается, а вместо него записывается новое. Изначально на доске написано число 8080. Какое минимальное положительное число можно получить такими действиями?



Решение:

При перестановке цифр и при вычитании 27 сохраняется остаток от деления на 9. Исходное число даёт остаток 7 при делении на 9 (сумма цифр $8+0+8+0=16$), поэтому получить число меньше, чем 7, не удастся.

Получить ровно 7 можно так: сначала переставляем цифры, чтобы получилось число 88, потом четыре раза вычитаем 18, получается 16. Переставляем цифры, потом из 61 три раза вычитаем 18, получаем 7.

Ответ: 7

Вариант 3 задания №4

На доске написано число, над которым (возможно, неоднократно) производятся действия, описанные ниже. За одно действие можно отнять от числа 18 либо переставить цифры в числе произвольным образом (при этом мы разрешаем ставить цифру 0 на первое место; например, число 0456 – это то же число, что и 456). В результате действия старое число стирается, а вместо него записывается новое. Изначально на доске написано число 6060. Какое минимальное положительное число можно получить такими действиями?

Решение:

При перестановке цифр и при вычитании 27 сохраняется остаток от деления на 9. Исходное число даёт остаток 3 при делении на 9 (сумма цифр $6+0+6+0=12$), поэтому получить число меньше, чем 3, не удастся.

Получить ровно 3 можно так: сначала переставляем цифры, чтобы получилось число 66, потом три раза вычитаем 18, получается 12. Переставляем цифры, потом из 21 вычитаем один раз 18, получаем 3.

Ответ: 3



Задание №5. Игра в камешки

Вариант 1 задания №5

Петя и Вася играют в игру. Имеется 4 кучи с камнями. За один ход разрешается взять из какой-то кучи несколько камешков, ребята делают ходы по очереди. Тот, кто возьмет последний камень из последней кучи, считается победителем. Петя, который ходит первым, знает как надо играть, чтобы всегда выигрывать.

В первой куче 15 камней.

Во второй куче 10 камней.

В третьей куче 20 камней.

В четвёртой куче 20 камней.

Какой ход Петя сделает первым? Укажите, из какой кучи и сколько камешков нужно взять, чтобы в дальнейшем можно было выиграть независимо от ходов Васи.

Решение:

Возьмем 5 камней из первой кучи. После этого у нас имеется две пары одинаковых куч. Если противник возьмет несколько камней из одной из одинаковых двух куч, мы столько же возьмем из другой. Тогда у нас всегда будет ход, и в итоге мы возьмем последний камень.

Ответ: 5 камней из первой кучи

Вариант 2 задания №5

Петя и Вася играют в игру. Имеется 4 кучи с камнями. За один ход разрешается взять из какой-то кучи несколько камешков, ребята делают ходы по очереди. Тот, кто возьмет последний камень из последней кучи, считается победителем. Петя, который ходит первым, знает как надо играть, чтобы всегда выигрывать.

В первой куче 10 камней.

Во второй куче 17 камней.

В третьей куче 17 камней.

В четвёртой куче 36 камней.



Какой ход Петя сделает первым? Укажите, из какой кучи и сколько камешков нужно взять, чтобы в дальнейшем можно было выиграть независимо от ходов Васи.

Решение:

Возьмем 26 камней из четвертой кучи. После этого у нас имеется две пары одинаковых куч. Если противник возьмет несколько камней из одной из одинаковых двух куч, мы столько же возьмем из другой. Тогда у нас всегда будет ход, и в итоге мы возьмем последний камень.

Ответ: 26 камней из четвертой кучи

Вариант 3 задания №5

Петя и Вася играют в игру. Имеется 4 кучи с камнями. За один ход разрешается взять из какой-то кучи несколько камешков, ребята делают ходы по очереди. Тот, кто возьмет последний камень из последней кучи, считается победителем. Петя, который ходит первым, знает как надо играть, чтобы всегда выигрывать.

В первой куче 13 камней.

Во второй куче 17 камней.

В третьей куче 13 камней.

В четвёртой куче 8 камней.

Какой ход Петя сделает первым? Укажите, из какой кучи и сколько камешков нужно взять, чтобы в дальнейшем можно было выиграть независимо от ходов Васи.

Решение:

Возьмем 9 камней из второй кучи. После этого у нас имеется две пары одинаковых куч. Если противник возьмет несколько камней из одной из одинаковых двух куч, мы столько же возьмем из другой. Тогда у нас всегда будет ход, и в итоге мы возьмем последний камень.

Ответ: 9 камней из второй кучи



Задание №6. Змей Горыныч

Вариант 1 задания №6

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему:

«Просто так тебя съесть неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении. Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 3000. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем.»

Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день это количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $2592 = 32 \cdot 81$ позволяет продержаться 9 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 8 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в четвертой степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 1296 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 1296$ уже больше 3000. Значит, единственный способ продержаться не менее 9 дней – это взять число $1296 \cdot 2 = 2592$.

Ответ: 2592

Вариант 2 задания №6

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему:



«Просто так тебя съесть неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении. Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 16000. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем.»

Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $15552 = 64 \cdot 243$ позволяет продержаться 11 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 10 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в пятой степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 7776 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 7776$ уже больше 16000. Значит, единственный способ продержаться не менее 11 дней – это взять число $7776 \cdot 2 = 15552$.

Ответ: 15552

Вариант 3 задания №6

Змей Горыныч поймал Ивана Царевича и сказал ему:

«Просто так тебя съесть неинтересно, да и я сейчас не голоден. Лучше я сначала тебя подержу в заточении. Загадай-ка какое-нибудь натуральное число, не превосходящее 500. Каждый день ты будешь делить оставшееся у тебя число на какое-нибудь натуральное, большее 1, и чтобы результат деления был целым. Делить на одно и то же число два дня подряд нельзя. Как только у тебя получится 1, я тебя съем.»



Какое число нужно загадать Ивану Царевичу, чтобы как можно дольше продержаться?

Решение:

Посмотрим на количество простых делителей (не обязательно различных) в числе, которое называет Иван. Тогда каждый день количество простых делителей будет уменьшаться хотя бы на 1. Кроме того, каждый раз число уменьшается как минимум вдвое, а за два дня как минимум вшестеро, так как делить на 2 два дня подряд нельзя.

Таким образом, чтобы продержаться дольше, нужно взять число с максимальным числом простых делителей. Число $432 = 16 \cdot 27$ позволяет продержаться 7 дней (делим на 2 и на 3, чередуясь). Заметим, что за 6 дней наше число придется разделить как минимум на 6 в третьей степени (так как за два дня мы делим как минимум на 6). То есть наше число уменьшается в 216 раз. Тогда после этого мы сможем продержаться только 1 день, и только если будем делить на 2, потому что $3 \cdot 216$ уже больше 500. Значит, единственный способ продержаться не менее 7 дней – это взять число $216 \cdot 2 = 432$.

Ответ: 432

