ВЗЛЁТ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

4 класс

6 заданий по 5 баллов
(максимум 30 баллов)
продолжительность 40 минут

Задание №1. Порядковые номера двузначных чисел

Вариант 1 задания №1

Какому по номеру двузначному числу равна сумма 10-го и 11-го двузначных чисел?

Решение:

Первое двузначное число – это 10, второе – это 11. Значит, номер двузначного числа на 9 больше его значения. То есть 10-ое двузначное число – это 19, 11-ое – 20, а их сумма равна 39, что является 30-м двузначным числом.

Ответ: 30-му

Вариант 2 задания №1

Какому по номеру двузначному числу равна сумма 15-го и 16-го двузначных чисел?

Решение:

Первое двузначное число – это 10, второе – это 11. Значит, номер двузначного числа на 9 больше его значения. То есть 15-ое двузначное число – это 24, 16-ое – 25, а их сумма равна 49, что является 40-м двузначным числом.

Ответ: 40-му

Вариант 3 задания №1

Какому по номеру двузначному числу равна сумма 20-го и 21-го двузначных чисел?

Решение:

Первое двузначное число – это 10, второе – это 11. Значит, номер двузначного числа на 9 больше его значения. То есть 20-ое двузначное число – это 29, 21-ое – 30, а их сумма равна 59, что является 50-м двузначным числом.

Ответ: 50-му

Задание №2. Любопытный прямоугольник

Вариант 1 задания №2

В некотором прямоугольнике, состоящем из 24 клеток, больше одной строки. Свинка Пеппа закрасила все клетки средней строки. Сколько клеток закрасила Пеппа?

Решение:

Средняя строка может быть только в случае, если вертикальная сторона прямоугольника нечетная. У числа 24 нечетный делитель, больший единицы только один: 3. Значит, это и есть длина вертикальной стороны прямоугольника. Горизонтальная сторона равна 8 – это и есть количество клеток, окрашенных свинкой.

Ответ: 8

Вариант 2 задания №2

В некотором прямоугольнике, состоящем из 28 клеток, больше одной строки. Свинка Пеппа закрасила все клетки средней строки. Сколько клеток закрасила Пеппа?

Решение:

Средняя строка может быть только в случае, если вертикальная сторона прямоугольника нечетная. У числа 28 нечетный делитель, больший единицы только один: 7 Значит, это и есть длина вертикальной стороны прямоугольника. Горизонтальная сторона равна 4 – это и есть количество клеток, окрашенных свинкой.

Ответ: 4

Вариант 3 задания №2

В некотором прямоугольнике, состоящем из 48 клеток, больше одной строки. Свинка Пеппа закрасила все клетки средней строки. Сколько клеток закрасила Пеппа?

Решение:

Средняя строка может быть только в случае, если вертикальная сторона прямоугольника нечетная. У числа 48 нечетный делитель, больший единицы только один:

3. Значит, это и есть длина вертикальной стороны прямоугольника. Горизонтальная сторона равна 16 – это и есть количество клеток, окрашенных свинкой.

Ответ: 16

Задание №3. Интересное трёхзначное число

Вариант 1 задания №3

Найдите самое маленькое трёхзначное число, в котором цифр, меньших 5, меньше, чем цифр, бОльших 5. Укажите это число.

Решение:

Цифры, меньшие 5, – это 0, 1, 2, 3, 4 (назовём их маленькими). Цифры, бОльшие 5, – это 6, 7, 8, 9 (назовём их большенькими). Маленьких в числе должно быть меньше, чем большеньких, причём всего цифр три. Значит, одна цифра должна быть маленькой, а две – большенькими (если мы хотим найти самое маленькое такое число).

Поэтому в качестве первой цифры берём самую маленькую из возможных (а именно, "1"), но оставшиеся две должны быть из большеньких. Чтобы число получилось как можно меньше, берём дважды самую маленькую (а именно, "6"). Итого: 166.

Ответ: 166

Вариант 2 задания №3

Найдите самое маленькое трёхзначное число, в котором цифр, меньших 6, меньше, чем цифр, бОльших 6. Укажите это число.

Решение:

Цифры, меньшие 6, – это 0, 1, 2, 3, 4, 5 (назовём их маленькими). Цифры, бОльшие 6, – это 7, 8, 9 (назовём их большенькими). Маленьких в числе должно быть меньше, чем большеньких, причём всего цифр три. Значит, одна цифра должна быть маленькой, а две – большенькими (если мы хотим найти самое маленькое такое число).

Поэтому в качестве первой цифры берём самую маленькую из возможных (а именно, "1"), но оставшиеся две должны быть из большеньких. Чтобы число получилось как можно меньше, берём дважды самую маленькую (а именно, "7"). Итого: 177.

Ответ: 177

Вариант 3 задания №3

Найдите самое маленькое трёхзначное число, в котором цифр, меньших 7, меньше, чем цифр, бОльших 7. Укажите это число.

Решение:

Цифры, меньшие 7, – это 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (назовём их маленькими). Цифры, бОльшие 7, – это 8, 9 (назовём их большенькими). Маленьких в числе должно быть меньше, чем большеньких, причём всего цифр три. Значит, одна цифра должна быть маленькой, а две – большенькими (если мы хотим найти самое маленькое такое число).

Поэтому в качестве первой цифры берём самую маленькую из возможных (а именно, "1"), но оставшиеся две должны быть из большеньких. Чтобы число получилось как можно меньше, берём дважды самую маленькую (а именно, "8"). Итого: 188.

Ответ: 188

Задание №4. Яблоки: зелёные и красные

Вариант 1 задания №4

Садовник собрал 30 зелёных и 30 красных яблок. Он разложил их в несколько корзин таким образом, что во всех корзинах оказалось поровну красных яблок, но разное количество зелёных (т.е. не было двух корзин, в которых было бы поровну зелёных яблок). Какое наибольшее число корзин могло у него быть?

Решение:

С одной стороны, количество корзин должно быть делителем числа 30 (чтобы можно было разложить красные яблоки в соответствии с условием).

С другой стороны, это количество не может быть очень большим, потому что должна быть возможность разложить разное количество яблок по этим корзинам.

Если корзин 7, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+5+6=21.

Если корзин 8, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+5+6+7=28.

Если корзин 9, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+5+6+7+8=36.

(Можно было рассуждать иначе. Пусть корзин X. Тогда зеленых яблок не менее, чем $0 + 1 + 2 + \ldots + (X - 1)$ (это самый «экономичный» способ сделать количества яблок в корзинах различным), что равно $X(X - 1)/2$.)

Так как зеленых яблок 30, то количество корзин строго меньше, чем 9. Выбирая наибольший делитель числа 30, не превосходящий 8, мы находим ответ.

Ответ: 6

Вариант 2 задания №4

Садовник собрал 60 зелёных и 60 красных яблок. Он разложил их в несколько корзин таким образом, что во всех корзинах оказалось поровну красных яблок, но разное количество зелёных (т.е. не было двух корзин, в которых было бы поровну зелёных яблок). Какое наибольшее число корзин могло у него быть?

Решение:

С одной стороны, количество корзин должно быть делителем числа 60 (чтобы можно было разложить красные яблоки в соответствии с условием).

С другой стороны, это количество не может быть очень большим, потому что должна быть возможность разложить разное количество яблок по этим корзинам.

Если корзин 11, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10=55.

Если корзин 12, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10+11=66.

Если корзин 13, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10+11+12=78.

(Можно было рассуждать иначе. Пусть корзин X. Тогда зеленых яблок не менее, чем $0 + 1 + 2 + ... + (X - 1)$ (это самый «экономичный» способ сделать количества яблок в корзинах различным), что равно $X(X - 1)/2$.)

Так как зеленых яблок 60, то количество корзин строго меньше, чем 12. Выбирая наибольший делитель числа 60, не превосходящий 11, мы находим ответ.

Ответ: 10

Вариант 3 задания №4

Садовник собрал 96 зелёных и 96 красных яблок. Он разложил их в несколько корзин таким образом, что во всех корзинах оказалось поровну красных яблок, но разное количество зелёных (т.е. не было двух корзин, в которых было бы поровну зелёных яблок). Какое наибольшее число корзин могло у него быть?

Решение:

С одной стороны, количество корзин должно быть делителем числа 96 (чтобы можно было разложить красные яблоки в соответствии с условием).

С другой стороны, это количество не может быть очень большим, потому что должна быть возможность разложить разное количество яблок по этим корзинам.

Если корзин 13, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10+11+12=78.

Если корзин 14, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10+11+12+13=91.

Если корзин 15, то зелёных яблок не меньше 0+1+2+...+9+10+11+12+13+14=105.

(Можно было рассуждать иначе. Пусть корзин X. Тогда зеленых яблок не менее, чем $0 + 1 + 2 + ... + (X - 1)$ (это самый «экономичный» способ сделать количества яблок в корзинах различным), что равно $X(X - 1)/2$.)

Так как зеленых яблок 96, то количество корзин строго меньше, чем 15. Выбирая наибольший делитель числа 96, не превосходящий 15, мы находим ответ.

Ответ: 12

Задание №5. Расписание автобусов

Вариант 1 задания №5

Каждые 25 минут из моего города в соседний отправляется автобус. Когда уходит первый автобус, до 6 утра остаётся меньше 6 минут. Когда уходит последний, до полуночи остается менее получаса. Известно, что хотя бы один автобус уходит, когда бьют часы на башне (они бьют один раз в час, включая полдень). Сколько всего автобусов в течение суток уходит под бой часов?

Решение:

Рассмотрим время отправления первого автобуса. Докажем, что он отправляется в 5:55.

Действительно, если он отправляется в другое время (пусть до шести в этот момент остается D минут, D может быть не целым), то время отправления любого из автобусов не может совпасть с моментом смены часа. С одной стороны, автобусы отправляются каждые 25 минут, то есть от времени отправления первого до времени отправления K-го проходит $25(K-1)$ минут. С другой стороны, от времени отправления первого до момента наступления M-го часа проходит $D+60(M-6)$. Приравнивая эти числа, мы видим, что число D обязательно целое и делится на 5. А, значит, равно 5.

Итак, первый автобус отправился в 5:55. А тогда легко подсчитать, в какие именно моменты отправление придется на наступление нового часа: это случится в 8:00, 13:00, 18:00 и 23:00.

Ответ: 4 автобуса

Вариант 2 задания №5

Каждые 25 минут из моего города в соседний отправляется автобус. Когда уходит первый автобус, до 6 утра остаётся меньше 7 минут. Когда уходит последний, до полуночи остается менее получаса. Известно, что хотя бы один автобус уходит, когда бьют часы на башне (они бьют один раз в час, включая полдень). Сколько всего автобусов в течение суток уходит под бой часов?

Решение:

Рассмотрим время отправления первого автобуса. Докажем, что он отправляется в 5:55.

Действительно, если он отправляется в другое время (пусть до шести в этот момент остается D минут, D может быть не целым), то время отправления любого из автобусов не может совпасть с моментом смены часа. С одной стороны, автобусы отправляются каждые 25 минут, то есть от времени отправления первого до времени отправления K-го проходит $25(K-1)$ минут. С другой стороны, от времени отправления первого до момента наступления M-го часа проходит $D+60(M-6)$. Приравнивая эти числа, мы видим, что число D обязательно целое и делится на 5. А, значит, равно 5.

Итак, первый автобус отправился в 5:55. А тогда легко подсчитать, в какие именно моменты отправление придется на наступление нового часа: это случится в 8:00, 13:00, 18:00 и 23:00.

Ответ: 4 автобуса

Вариант 3 задания №5

Каждые 25 минут из моего города в соседний отправляется автобус. Когда уходит первый автобус, до 6 утра остаётся меньше 8 минут. Когда уходит последний, до полуночи остается менее получаса. Известно, что хотя бы один автобус уходит, когда бьют часы на башне (они бьют один раз в час, включая полдень). Сколько всего автобусов в течение суток уходит под бой часов?

Решение:

Рассмотрим время отправления первого автобуса. Докажем, что он отправляется в 5:55.

Действительно, если он отправляется в другое время (пусть до шести в этот момент остается D минут, D может быть не целым), то время отправления любого из автобусов не может совпасть с моментом смены часа. С одной стороны, автобусы отправляются каждые 25 минут, то есть от времени отправления первого до времени отправления K-го проходит $25(K-1)$ минут. С другой стороны, от времени отправления первого до момента наступления M-го часа проходит $D + 60(M - 6)$. Приравнивая эти числа, мы видим, что число D обязательно целое и делится на 5. А, значит, равно 5.

Итак, первый автобус отправился в 5:55. А тогда легко подсчитать, в какие именно моменты отправление придется на наступление нового часа: это случится в 8:00, 13:00, 18:00 и 23:00.

Ответ: 4 автобуса

Задание №6. Числа по кругу

Вариант 1 задания №6

По кругу расставлено 50 чисел. У 30 чисел правый сосед делится на 2, а у 45 чисел левый сосед делится на 3. Какое наименьшее количество чисел из этих 50 могут делиться на 6?

Решение:

У каждого числа есть правый сосед, что означает, что среди данных чисел ровно 30 делится на 2. Аналогично, ровно 45 чисел делится на 3. Поэтому не меньше $30 + 45 - 50 = 25$ чисел делится и на 2, и на 3, то есть – на 6.

Ответ: 25 чисел

Вариант 2 задания №6

По кругу расставлено 50 чисел. У 35 чисел правый сосед делится на 2, а у 43 чисел левый сосед делится на 3. Какое наименьшее количество чисел из этих 50 могут делиться на 6?

Решение:

У каждого числа есть правый сосед, что означает, что среди данных чисел ровно 35 делится на 2. Аналогично, ровно 43 числа делится на 3. Поэтому не меньше $35 + 43 - 50 = 28$ чисел делится и на 2, и на 3, то есть – на 6.

Ответ: 28 чисел

Вариант 3 задания №6

По кругу расставлено 50 чисел. У 40 чисел правый сосед делится на 2, а у 41 чисел левый сосед делится на 3. Какое наименьшее количество чисел из этих 50 могут делиться на 6?

Решение:

У каждого числа есть правый сосед, что означает, что среди данных чисел ровно 40 делится на 2. Аналогично, ровно 41 число делится на 3. Поэтому не меньше $40 + 41 - 50 = 31$ числа делится и на 2, и на 3, то есть – на 6.

Ответ: 31 число