

XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Региональный этап

5 февраля 2022 г.

8 класс.

Второй день.

6. Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.
7. Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?
8. Будем называть натуральное число *красивым*, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет (во избежание недоразумений напомним, что десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?
9. Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.
10. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?