

XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения и критерии оценки заданий регионального этапа, 2 день

6. Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022. (Н. Агаханов)

Решение. Пусть наши числа равны $k, k+1$ и $k+2$, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел $k+1$ и $k+2$ равны, соответственно, $r+1$ и $r+2$, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r+3 = 3(r+1)$. Противоречие.

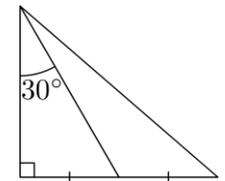
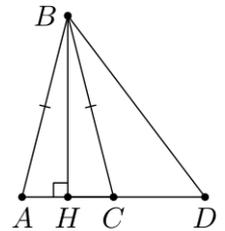
Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если первое (наименьшее) из чисел делится на 2022, то числа дают соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 2022, сумма которых равна простому числу 3.

Критерии. За отсутствие объяснения, почему описываемая в условии задачи ситуация возможна, оценка не снижается.

Если в решении, аналогичном приведенному выше, считается, что остатки от деления на 2022 трёх последовательных целых чисел равны $k, k+1$ и $k+2$, без оговорки, что ни одно из данных чисел не делится на 2022, оно оценивается из 4 баллов.

7. Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника? (Н. Агаханов)

Ответ. Существует. **Решение.** Возьмём треугольник ABC , где $AB = BC$ и высота BH , проведенная из вершины B , равна $2AC$ (очевидно, такой существует). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2AC$, а медиана BC равна стороне AB . Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведенная из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30° .



Критерии. Только ответ «существует»: 0 баллов.

Чертёж без обоснования: 0 баллов. При этом следует учитывать, что роль обоснования полностью или частично могут сыграть указанные на чертеже параметры (длины и соотношения длин отрезков, величины углов и т. п.).

8. Будем называть натуральное число **красивым**, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым? (К. Сухов)

Ответ. Не может. **Решение.** Очевидно, количество цифр красивого числа делится на 3. Если в десятичной записи красивого числа x $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству $10^{3n-1} < x < 3 \cdot 10^{3n-1}$ (*). Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9 \cdot 10^{3(k+m)-2}$, а, значит, и между степенями десятки с показателями $3(k+m)-2$ и $3(k+m)-1$. Красивое же число в силу неравенства (*) лежит между степенями десятки с показателями $3n-1$ и $3n$. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

Критерии. Только ответ «не может»: 0 баллов.

Замечено только, что в числе $3n$ цифр, дальнейшего содержательного продвижения нет: 0 баллов.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписано неравенство $10^{3n-1} < x$, дальнейшего содержательного продвижения нет: 1 балл.

Замечено, что в числе $3n$ цифр, выписаны оба неравенства, входящих в двойное неравенство (*), дальнейшего содержательного продвижения нет: 2 балла.

Не объяснено, почему неравенство $10^{3(k+m)-2} < x < 9 \cdot 10^{3(k+m)-2}$ несовместимо с неравенством (*) — штраф в 1 балл.

Любые не доведённые до полного решения рассуждения про расположение цифр в красивом числе (в том числе с установлением каких-либо свойств наборов последних цифр красивых чисел) не оцениваются.

9. Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают. (С. Берлов)

Решение. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \dots > a_{100}$, а Вася — $b_1 > b_2 > \dots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1 , а у Пети все остатки будут меньше b_1 — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ для некоторого $k \geq 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел a_1, \dots, a_k у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васины числа, а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1} , так как там либо делимое меньше a_{k+1} , либо делитель не превосходит a_{k+1} . Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \dots, 99$ (а знакомые с методом математической индукции сразу оформят его как индукционный переход), мы докажем утверждение задачи.

Критерии. Доказано, что у Васи и Пети равны наибольшие числа, дальнейшее содержательное продвижение отсутствует: *2 балла*. Рассуждение типа «аналогично доказываем совпадение двух следующих чисел и т. д.» содержательным продвижением не является, поскольку доказательство дальнейших совпадений требует существенной модификации доказательства совпадения двух наибольших чисел.

10. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению? (С. Берлов)

Ответ. 50. **Решение.** *Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. *Оценка.* Рассуждаем от противного. Пусть $k < 50$. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальных позиций, причем сдвиг по часовой стрелке считаем с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется 1, а из сдвига другой вычитается 1. Пусть после нескольких ходов все фишки сместились на одну позицию по часовой стрелке. Тогда полный сдвиг фишки с номером k равен $100t_k + 1$, где t_k — число полных оборотов этой фишки (обороты по часовой стрелке считаются со знаком плюс, а против часовой — со знаком минус). Так как $k < 50$, фишки с номерами 1 и 51 не могли меняться местами, и потому совершили одинаковое число полных оборотов, то есть $t_1 = t_{51}$. Аналогично, $t_2 = t_{52}, \dots, t_{50} = t_{100}$. Поэтому сумма всех сдвигов всех фишек равна $100(2t_1 + \dots + 2t_{50} + 1)$. Она должна быть равна 0, так как равна 0 сумма сдвигов при каждом ходе. Но она не равна 0, так как сумма в скобках нечетна. Противоречие.

Критерии. Только верный ответ: *0 баллов*.

Баллы за пример и оценку суммируются.

Дан верный ответ, приведен верный пример, продвижения в доказательстве оценки нет: *2 балла*.

Ответ и доказанная оценка, примера нет: *4 балла*.

Замечено, что сумма ориентированных сдвигов фишек относительно их начальных расположений равна 0, других содержательных продвижений нет (наличие ответа при отсутствии примера содержательным продвижением не считается): *1 балл*.