Подмосковная олимпиада 2021-2022. 5 класс. 26 марта 2022г.

Необходимо решить хотя бы 3 из 4 задач

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записи его цифр в обратном порядке (например, 252 – палиндром, а 1383 – нет). Представьте число 2022 в виде суммы двух палиндромов.

   Решение. Ответ: $1881 + 141 = 2022$.

2. Прямоугольник разрезан на несколько квадратов, периметр каждого из которых – целое число метров. Может ли периметр исходного прямоугольника выражаться не целым числом метров? Если нет, то объясните – почему, если да, то найдите наименьший периметр (в метрах) такого прямоугольника.

   Решение. Ответ: 1,5. Так как 1 – наименьшее натуральное число, поэтому периметр любого из получившихся квадратов не может быть меньше, чем 1. Количество квадратов – не меньше, чем 2. В этом случае периметр равен 1,5. При изменении хотя бы одного из этих параметров, очевидно, периметр будет больше, чем 1,5 м.

3. На склад приехала машина с фургоном прямоугольной формы, полностью заполненном одинаковыми ящиками. Ящики имеют форму куба. Рабочие сначала вытащили весь верхний слой ящиков – 65 штук. Потом вытащили боковой слой – 78 штук, затем передний слой. Сколько ящиков осталось в машине, если их было не больше 5000?

   Решение. Пусть длина фургона a, ширина b , высота c. Верхний слой содержит 65 ящиков, значит $a*b = 13*5, a*b = 5*13, a*b = 65*1, a*b = 1*65$. Боковой слой содержит 78 ящиков, a*(c-1)=78. Т.е. ни a, ни c не кратно 5. Если a*b=13*5, то $a = 13, b = 5, c - 1 = 6, c = 7$. Передний слой содержит $(b - 1) * (c - 1) = 24$ ящиков. При этом изначально было $a * b * c = 455$ ящиков $\Rightarrow$ осталось $455 - 78 - 65 - 24 = 288$. Ответ 288.

4. Дана последовательность, в которой пропущено ровно шесть чисел: 201; 204; 210; 213; 219; __; __; __; __; __; __; 303; 309. Вставьте пропущенные шесть чисел.

   Решение. Решение задачи. Последовательность задана по правилу: каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего путём прибавления к нему его суммы цифр. Таким образом, пропущенные числа: 231, 237, 249, 264, 276, 291.

Подмосковная олимпиада 2021-2022. 5 класс.

Задачи с устной проверкой решения

5. В одном пятнадцатиэтажном доме лифт работает по определенным правилам. С этажа X можно подняться (или опуститься) на этаж Y если выполняется хотя бы одно из условий: а) $X+Y=15$; б) X делится на Y. Найдите номера этажей, на которых лифт никогда не останавливается, движение начинается с первого этажа.

   Решение. С 1 этажа можно уехать только на 14 этаж. С 14 этажа возможные маршруты: $14 \to 2 \to 13 \to 1, 14 \to 7 \to 1, 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 11 \to 1$ (после 8 этажа можно было поехать на 2, но тогда этот путь включил был цикл из первого пути и новые этажи посетить бы не удалось) Ответ:3, 5, 6, 9, 10, 12, 15

6. В мешке лежит некоторое количество одинаковых камешков. Все камешки можно разложить в две кучки так, что в одной кучке будет в два раза больше камней, чем в другой, и останется один лишний камешек. А можно разложить в две кучки так, что в одной кучке будет в три раза больше камней, чем в другой, и также останется один лишний. Кроме того, все камешки можно разложить в десять кучек так, что в одной кучке будет ровно на 5 камней больше, чем каждой из остальных. Какое наименьшее количество камешков может быть в мешке?

   Решение. Из первого распределения по кучкам следует, что количество камешков делится на 3 с остатком 1. Из второго распределения по кучкам следует, что количество камешков делится на 4 с остатком 1. Т.е. число камней делится на 12 с остатком 1. Тогда камней не меньше 13. Но 13 не удовлетворяет последнему условию. Следующее подходящее - 25 и для него условие выполняется. Ответ: 25.

7. В углу клетчатого поля размером 12×12 стоит 25 шашек таким образом, что они занимают квадрат 5×5. На каждой клетке может стоять не более одной шашки. За один ход любую шашку может переместить строго через одну клетку, занятую другой шашкой, на свободную клетку (в любом направлении по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов расставить шашки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу этого поля?

   Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим раскраску всего поля горизонтальными полосами — чёрными и белыми. Затем посчитаем количество шашек, стоящих на чёрных и белых полях до перемещения и после него. Эти количества изменились, чего быть не должно, так как каждый ход не меняет цвета шашки.

8. В зале собрания рыцарей круглого стола стоит 30 стульев. На собрание всегда приходит сколько-то рыцарей и ровно один лжец. Если у лжеца хотя бы один сосед рыцарь, то он боится и говорит только правду. Какое наименьшее количество рыцарей должно прийти, чтобы лжец, как бы он ни сел, всегда говорил правду?

   Решение. Решение задачи. Если за столом есть хотя бы 3 свободных стула подряд, то лжец сядет на средний из них и солжёт. Таким образом, по крайней мере на одном из трёх подряд идущих стульев должен сидеть рыцарь. То есть рыцарей не меньше 10. Покажем, что 10 рыцарей достаточно. Посадим рыцарей через 2 стула. Тогда в какой бы промежуток не сел лжец, его соседом всегда будет рыцарь и солгать не удастся.