

10 класс

10.1. Чему равна сумма цифр числа $A = 100^{40} - 100^{30} + 100^{20} - 100^{10} + 1$?

10.2. Множество M состоит из произведений пар последовательных натуральных чисел: $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$. Докажите, что сумма некоторых двух элементов множества M равна 2^{2021} .

10.3. Даны три квадратных трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = bx^2 + cx + a, \quad h(x) = cx^2 + ax + b,$$

где a, b, c – различные ненулевые действительные числа. Из них составили три уравнения $f(x) = g(x), f(x) = h(x), g(x) = h(x)$. Найдите произведение всех корней этих трех уравнений, если известно, что каждое из них имеет по два различных корня.

10.4. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C выбрана точка D . Пусть S_1 – окружность, описанная около треугольника ABD , S_2 – окружность, описанная около треугольника CBD . Касательная к окружности S_1 , проходящая через точку A , и касательная к окружности S_2 , проходящая через точку C , пересекаются в точке P . Докажите, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

10.5. Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). И этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков). Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?