ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители: Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

6 класс

6.1. Найдите самое маленькое число, у которого все цифры различны, сумма первых двух цифр (слева) делится на 2, сумма первых трех цифр делится на 3, сумма первых четырех цифр делится на 4, первых пяти цифр делится на 5, первых шести цифр делится на 6.

Ответ. 132684.

Решение. Число должно состоять не менее чем из 6 цифр. Будем составлять 6-значное число. Из всех таких чисел меньше то, у которого самая маленькая первая (слева) цифра. Запишем на первое место единицу. Вторая цифра должна быть нечетной. Цифру 1 уже использовали. Значит, вторая цифра – 3. Рассуждая аналогично, получаем ответ – число 132684.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 5 баллов.

6.2. В Солнечном городе 5 коротышек едят пончики ежедневно, 7 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 9 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

Ответ. 8.

Решение. Из тех 9 коротышек, что вчера ели пончики, 5 коротышек едят их ежедневно, значит остальные $9 - 5 = 4$ едят их через день. Поэтому сегодня эти четверо есть пончики не будут, а остальные $7 - 4 = 3$ из тех, кто ест через день – будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те пятеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ $3 + 5 = 8$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

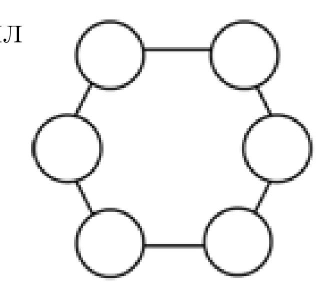
6.3. Бегун пробежал в первом забеге два круга по стадиону со скоростью v за 4 минуты. Во второй раз он пробежал первый круг со скоростью p, а второй круг со скоростью $v/2$ и потратил на второй забег 5 минут. Найдите отношение $v : p$.

Ответ. $v : p = 1 : 2$.

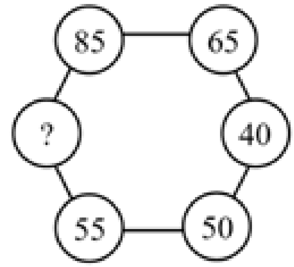
Решение. Во втором забеге второй круг бегун пробежал со скоростью в два раза меньше, значит, на него он затратил 4 минуты (как в первом забеге на два круга). Значит, первый круг во втором забеге он пробежал за $5-4 = 1$ (мин). Длина первого и второго кругов одинакова, поэтому $v/2 : p = 1 : 4$, откуда $v : p = 1 : 2$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балл

6.4. На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.

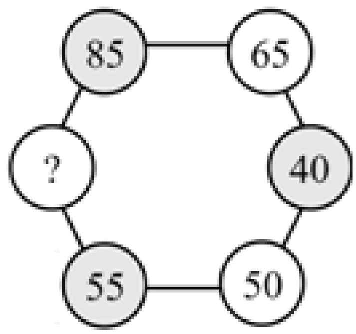


На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 10 мух, и положила по 5 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух могло оказаться на шестой кочке?



Ответ. 65.

Решение. Раскрасим кочки по порядку: серая-белая-серая-....



Заметим, что каждая лягушка положила по 5 мух на одну белую и на одну серую кочку. Это значит, что суммарное количество мух, оказавшихся на серых кочках равно количеству мух, оказавшихся на белых кочках (а также в 5 раз больше общего количества лягушек).

1) $85 + 40 + 55 = 180$ (мух) – всего;

2) $180 - 50 - 65 = 65$ – на шестой кочке.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

6.5. За круглый стол сели 9 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего каждый сказал: «У меня монет больше, чем у соседа справа». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 6.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. Заметим, что 3 рыцаря не могут сидеть подряд. Действительно, пусть рыцари A, B, C сидят рядом, причем B сидит справа от A, C сидит справа от B, а еще справа от C сидит D. Если у A будет x монет, у B – y монет, у C – z монет, а у D – t монет, то будет выполняться неравенство $x > y > z > t$, которое невозможно для чисел 0, 1, 2. Значит, среди любых 3 подряд сидящих есть лжец. Разобьем сидящих за столом на 3 группы по 3 человека сидящих рядом. В каждой из этих групп есть лжец. Значит, за столом сидит не менее 3 лжецов, и поэтому не более 6 рыцарей. Покажем, что за столом могло сидеть 6 рыцарей. Пусть они сидят так: -Р-Р-Л-Р-Р-Л-Р-Р-Л-. И сидящие рядом рыцари обменяются монетами, а лжецы отдадут свои монеты рыцарям, сидящим от них справа. Тогда количества монет у сидящих будет -Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-. И рыцари скажут правду, а лжецы солгут.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 6 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 6 рыцарей — 2 балла.

7 класс

7.1. Числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ записали в каком-то порядке и обозначили их буквами a, b, c, d, e, f. Может ли выполняться равенство

$$(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6) = 75\ ?$$

Ответ. Может.

Решение. Расставим числа следующим образом:

$$(6-1)(3-2)(4-3)(5-4)(2-5)(1-6) = 75\ .$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования (без приведенного примера) — 0 баллов.

7.2. В Солнечном городе 6 коротышек едят пончики ежедневно, 8 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 11 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

Ответ. 9.

Решение. Из тех 11 коротышек, что вчера ели пончики, 6 коротышек едят их ежедневно, значит остальные $11 - 6 = 5$ едят их через день. Поэтому сегодня эти пятеро есть пончики не будут, а остальные $8 - 5 = 3$ из тех, кто ест через день – будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те шестеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ $3 + 6 = 9$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

7.3. У Васи и Миши телефоны показывают 15% заряда. А через час у Васи – 11%, у Миши – 12%. Может ли телефон Миши разрядиться раньше телефона Васи, если телефоны разряжаются равномерно, а показываемый процент заряда – это округленное до целых значение заряда?

Ответ. Может.

Решение. Покажем, что Мишин телефон может разрядиться раньше. Пусть изначально заряд Мишиного телефона был 15,4%, Васиного – 14,6%, а через час Мишиного – 11,6%, а Васиного – 11,4%. Значит, за час Мишин телефон разряжается на $15,4 - 11,6 = 3,8\%$, а Васин – на $14,6 - 11,4 = 3,2\%$. Поэтому Мишин телефон разрядится через $11,6 : 3,8 \approx 3,1$ часа, а Васин – через $11,4 : 3,2 \approx 3,6$ часа.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

7.4. Даны девять карточек, на которых написаны числа $5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9$. Из этих карточек сложили три трехзначных числа A, B, C, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения $A + B - C$?

Ответ. 149.

Решение. Составив наименьшую сумму чисел A и B, а также наибольшее число C, мы получим наименьшее значение выражения $A+B-C$. Это $566+567-988=145$. Но такое разбиение не подходит: у двух чисел есть одинаковые цифры. Поменяв в разряде единиц местами цифры 6 и 8 получим нужное разбиение: $568+567-986=149$. Почему такое разбиение – лучшее? При любом другом варианте расстановки в разряде сотен цифр мы получим вклад сотен, равный 200, или 300, $\dots$. A в разрядах десятков и единиц мы получим положительные значения, так как сумма любых двух из цифр больше любой третьей цифры. Значит, число $A+B-C$ будет больше 200. Итак, A и B начинаются с цифр 5, а C – с цифры 9. Аналогично получаем, что вторые цифры чисел A и B должны быть 6, а числа C – 8. Про единицы сказано выше.

Комментарий. Верный ответ и пример чисел A, B, C без обоснования минимальности — 4 балла.

7.5. За круглый стол сели 10 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего 5 человек сказали: «У меня одна монета», а остальные 5 сказали: «У меня нет монет». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 7.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. А суммарное число монет будет равно 10. Заметим, что если человек солжет, то он назовет количество монет, которое отличается от настоящего на 1 или 2. Так как по ответам суммарное число монет отличается от настоящего на $10-5=5$, то не меньше 3 человек должны были солгать. Поэтому за столом сидит не больше 7 рыцарей. Пусть рыцари за столом сидят и передают монеты так (стрелочкой показано, куда передается монета; в скобках указано количество монет после передачи): $\leftarrow$ Р(0) – Р(0) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Л(1)$\rightarrow$ Л(2) $\leftrightarrow$ Л(2) $\leftarrow$. При этом все рыцари говорят правду, а лжецы лгут, говоря, что у них 0 монет.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 7 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 7 рыцарей — 2 балла.

8 класс

8.1. Чему равна сумма цифр числа $A = 10^{50} - 10^{40} + 10^{30} - 10^{20} + 10^{10} - 1$?

Ответ. 270.

Решение. Число равно сумме трех чисел: числа, составленного из 10 девяток, после которых следуют 40 нулей, числа из 10 девяток, после которых следуют 20 нулей, наконец, числа из 10 девяток. Все девятки приходятся на нули в других слагаемых, поэтому переноса разрядов не происходит, и ответ равен $90 + 90 + 90 = 270$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

8.2. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, при этом такое, что сумма любых двух его цифр — простое число.

Ответ. 520.

Решение. Если искомое число хотя бы четырехзначное, то у него либо три цифры одной четности, либо две пары цифр одной четности. В каждом из этих случаев получаем, что две из сумм цифр – четные. Значит, они должны равняться 2. А число 2 представимо в виде суммы разных цифр единственным способом: $0 + 2$. Трехзначным числом, удовлетворяющим условию, является 520. Покажем, что большего числа быть не может. У трехзначного числа есть две цифры одной четности, и, как мы показали выше, эти цифры могут быть только 0 и 2. Третья цифра должна быть нечетной. Цифра 9 не подходит: $9 + 0 = 9$ – составное число. Цифра 7 не подходит: $7 + 2 = 9$. А цифра 5 подходит.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла. Доказано, что число не более чем трехзначное — 2 балла.

8.3. У Васи и Миши телефоны показывают 15% заряда. А через час у Васи – 11%, у Миши – 12%. Может ли телефон Миши разрядиться раньше телефона Васи, если телефоны разряжаются равномерно, а показываемый процент заряда – это целая часть значения заряда? Целая часть числа A – это наибольшее целое число, не превосходящее A.

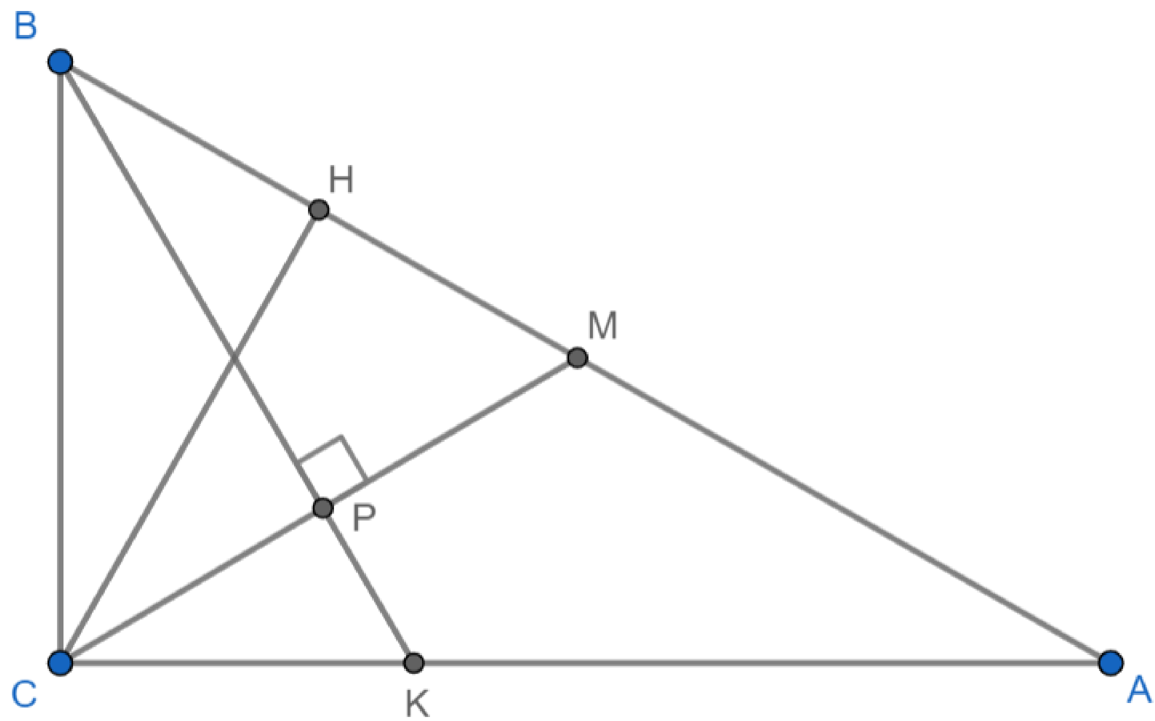
Ответ. Может.

Решение. Покажем, что Мишин телефон может разрядиться раньше. Пусть изначально заряд Мишиного телефона был 15,9%, Васиного – 15,0%, а через час Мишиного – 12,0%, а Васиного – 11,9%. Значит, за час Мишин телефон разряжается на $15,9 - 12,0 = 3,9\%$, а Васин – на $15,0 - 11,9 = 3,1\%$. Поэтому Мишин телефон разрядится через $12,0 : 3,9 \approx 3,1$ часа, а Васин – через $11,9 : 3,1 \approx 3,8$ часа.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

8.4. Дан прямоугольный треугольник ABC (AB – гипотенуза). На большем катете AC треугольника ABC выбрана точка K так, что $AK = BK$. Пусть CH – высота треугольника ABC, и точка M симметрична точке B относительно точки H. Докажите, что отрезки BK и CM перпендикулярны.

Решение. Пусть P – точка пересечения отрезков BK и CM. Нам нужно доказать, что угол BPM прямой, то есть что сумма углов $\angle PMB = \angle CMB$ и $\angle PBM = \angle KBM$ равна $90°$. Но угол CMB равен углу CBM $(= \angle CBA)$, так как треугольник BCM – равнобедренный, а угол KBA равен углу CAB. Осталось заметить, что сумма углов CBA и CAB равна $90°$.



8.5. За круглый стол сели 10 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего каждый сказал: «У меня монет больше, чем у соседа справа». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 6.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. Заметим, что 3 рыцаря не могут сидеть подряд. Действительно, пусть рыцари A, B, C сидят рядом, причем B сидит справа от A, C сидит справа от B, а еще справа от C сидит D. Если у A будет x монет, у B – y монет, у C – z монет, а у D – t монет, то будет выполняться неравенство $x > y > z > t$, которое невозможно для чисел 0, 1, 2. Значит, среди любых 3 подряд сидящих есть лжец. Выберем какого-нибудь из лжецов, сидящего за столом (такой есть, так как за столом есть 3 подряд сидящих), а оставшихся разобьем на 3 группы по 3 человека сидящих рядом. В каждой из этих групп есть лжец. Значит, за столом сидит не менее $1+3 = 4$ лжецов, и поэтому не более 6 рыцарей. Покажем, что за столом могло сидеть 6 рыцарей. Пусть они сидят так: -Р-Р-Л-Л-Р-Р-Л-Р-Р-Л-. И сидящие рядом рыцари обменяются монетами, а лжецы отдадут свои монеты людям, сидящим от них справа. Тогда количества монет у сидящих будет -Р(2)-Р(1)-Л(0)-Л(1)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-. И рыцари скажут правду, а лжецы солгут.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 6 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 6 рыцарей — 2 балла.

9 класс

9.1. Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 4$, то получится 24. Найдите $f(-2)$.

Ответ. 6.

Решение. Имеем: $D_1 - D_2 = 4(b^2 - ac - (b+2)^2 + (a+1)(c+4)) = 4(-4b+4a+c) = 4f(-2)$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

9.2. За круглый стол сели 6 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего 3 человек сказали: «У меня одна монета», а остальные 3 сказали: «У меня нет монет». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 4.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. А суммарное число монет будет равно 6. Заметим, что если человек солжет, то он назовет количество монет, которое отличается от настоящего на 1 или 2. Так как по ответам суммарное число монет отличается от настоящего на $6 - 3 = 3$, то не меньше 2 человек должны были солгать. Поэтому за столом сидит не больше 4 рыцарей. Пусть рыцари за столом сидят и передают монеты так (стрелочкой показано, куда передается монета; в скобках указано количество монет после передачи): $\leftrightarrow$ Л(1) – Р(0) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Р(1) $\rightarrow$ Л(2) $\leftrightarrow$. При этом все рыцари говорят правду, а лжецы лгут, говоря, что у них 0 монет.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 4 рыцарей — 5 баллов.

Доказано, что за столом может сидеть 4 рыцарей — 2 балла.

9.3. На доске написано N простых чисел (не обязательно различных). Оказалось, что сумма любых трех чисел на доске — тоже простое число. При каком наибольшем N это возможно?

Ответ. $N = 4$.

Решение. Рассмотрим остатки при делении на 3 написанных N чисел. Все 3 остатка встречаться не могут, так в этом случае сумма трех чисел с различными остатками будет делиться на 3 (и будет больше 3), поэтому она не будет простым числом. Поэтому возможных остатков не больше 2. Также заметим, что чисел с одинаковым остатком не может быть 3, так как сумма этих трех чисел будет делиться на 3 (и будет больше 3), поэтому она не будет простым числом. Таким образом, N не может быть больше $2 \cdot 2 = 4$.

N может равняться 4. Например, если на доске написаны числа $3, 3, 5, 5$ (суммы $11, 13$).

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, $3, 3, 5, 11$ (суммы $19, 17, 11$).

Комментарий. Доказано, что N не больше 4 — 5 баллов.

Приведен пример с 4 числами — 2 балла.

9.4. Вася вырезал из картона треугольник и занумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол равный углу при этой вершине 15 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Если повернуть по часовой стрелке Васин треугольник вокруг его вершины под номером 2 на угол равный углу при этой вершине 6 раз, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник вокруг вершины под номером 3 на угол равный углу при этой вершине n раз, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ. 5.

Решение. Пусть угол при первой вершине равен α градусов, при второй β градусов, а при третьей γ градусов. При поворотах вокруг вершин Васин треугольник прежде чем вернуться в стартовое положение мог сделать несколько полных оборотов. Пусть при вращении вокруг первой вершины он сделал k полных оборотов, при вращении вокруг второй – m полных оборотов, вокруг третьей – l. Тогда из условия задачи следует, что $15\alpha = 360k$, $6\beta = 360m$ и $n\gamma = 360l$. Из первых двух уравнений находим, что $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$, значит $\alpha \geq 24$, $\beta \geq 60$. Заметим что $n \geq 4$, так как иначе $\gamma > 120$, что в сумме с β больше 180. $n \neq 4$, поскольку иначе $\gamma = 90$, значит $\alpha + \beta = 90$, чего быть не могло в силу $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$.

$n = 5$ подходит: возьмем треугольник с углами $\alpha = 48, \beta = 60, \gamma = 72$.

Комментарий. Доказано, что $n \geq 4$ — 3 балла.

Доказано, что $n \neq 4$ — 2 балла.

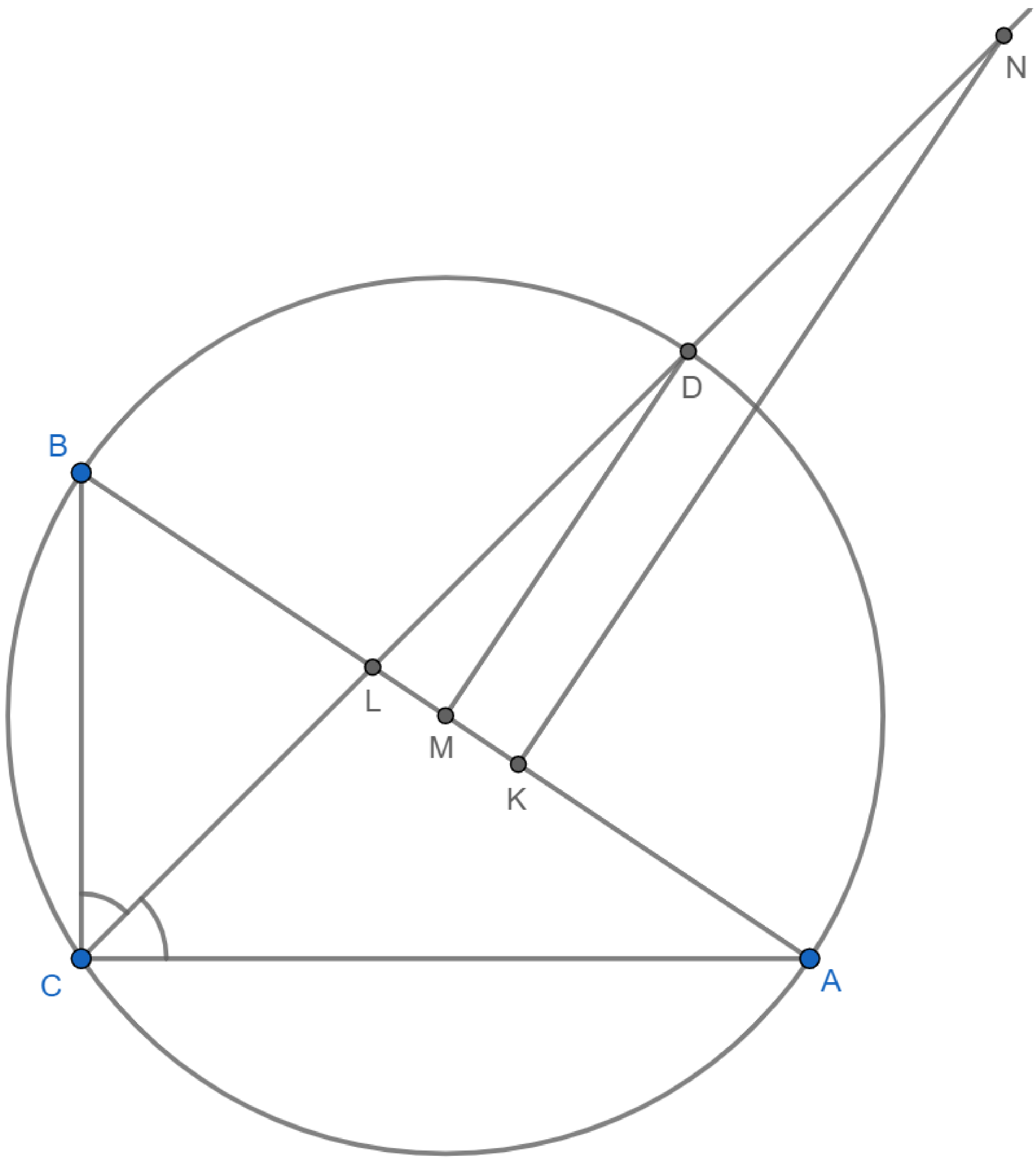
Приведен пример для $n = 5$ — 2 балла.

Если наименьшее значение не найдено, но приведен пример треугольника с таким свойством — 1 балл.

9.5. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса CL. Точка K выбрана на гипотенузе этого треугольника так, что $AL = BK$. Перпендикуляр к AB, проходящий через точку K, пересекает луч CL в точке N. Докажите, что $KN = AB$.

Решение. Отметим середину AB, точку M, она же середина LK, так как $AL = BK$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает биссектрису CL в точке

D на описанной окружности ω треугольника ABC. Действительно, биссектриса CL проходит через середину дуги BA, но и серединный перпендикуляр к хорде BA, стягивающей эту дугу, также проходит через ее середину. Точка M – центр окружности ω, так как угол C прямой, значит, $MD = MA = AB/2$. Но MD – средняя линия треугольника LKN, так как $MD||KN$ и M – середина LK, значит, $KN = 2MD = AB$.



10 класс

10.1. Чему равна сумма цифр числа $A = 100^{40} - 100^{30} + 100^{20} - 100^{10} + 1$?

Ответ. 361.

Решение. Число равно сумме трех чисел: числа, составленного из 20 девяток, после которых следуют 60 нулей, числа из 20 девяток, после которых следуют 20 нулей, наконец, числа 1. Все девятки и единица приходятся на нули в других слагаемых, поэтому переноса разрядов не происходит, и ответ равен $180 + 180 + 1 = 361$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

10.2. Множество M состоит из произведений пар последовательных натуральных чисел: $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $\ldots$. Докажите, что сумма некоторых двух элементов множества M равна 2^{2021}.

Решение. Рассмотрим сумму двух последовательных произведений: $S = (n-1)n + n(n+1) = 2n^2$. Значит, если $n^2 = 2^{2020}$ ($n = 2^{1010}$), то $S = 2^{2021}$.

10.3. Даны три квадратных трехчлена $f(x) = ax^2+bx+c$, $g(x) = bx^2+cx+a$, $h(x) = cx^2+ax+b$, где a, b, c – различные ненулевые действительные числа. Из них составили три уравнения $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$. Найдите произведение всех корней этих трех уравнений, если известно, что каждое из них имеет по два различных корня.

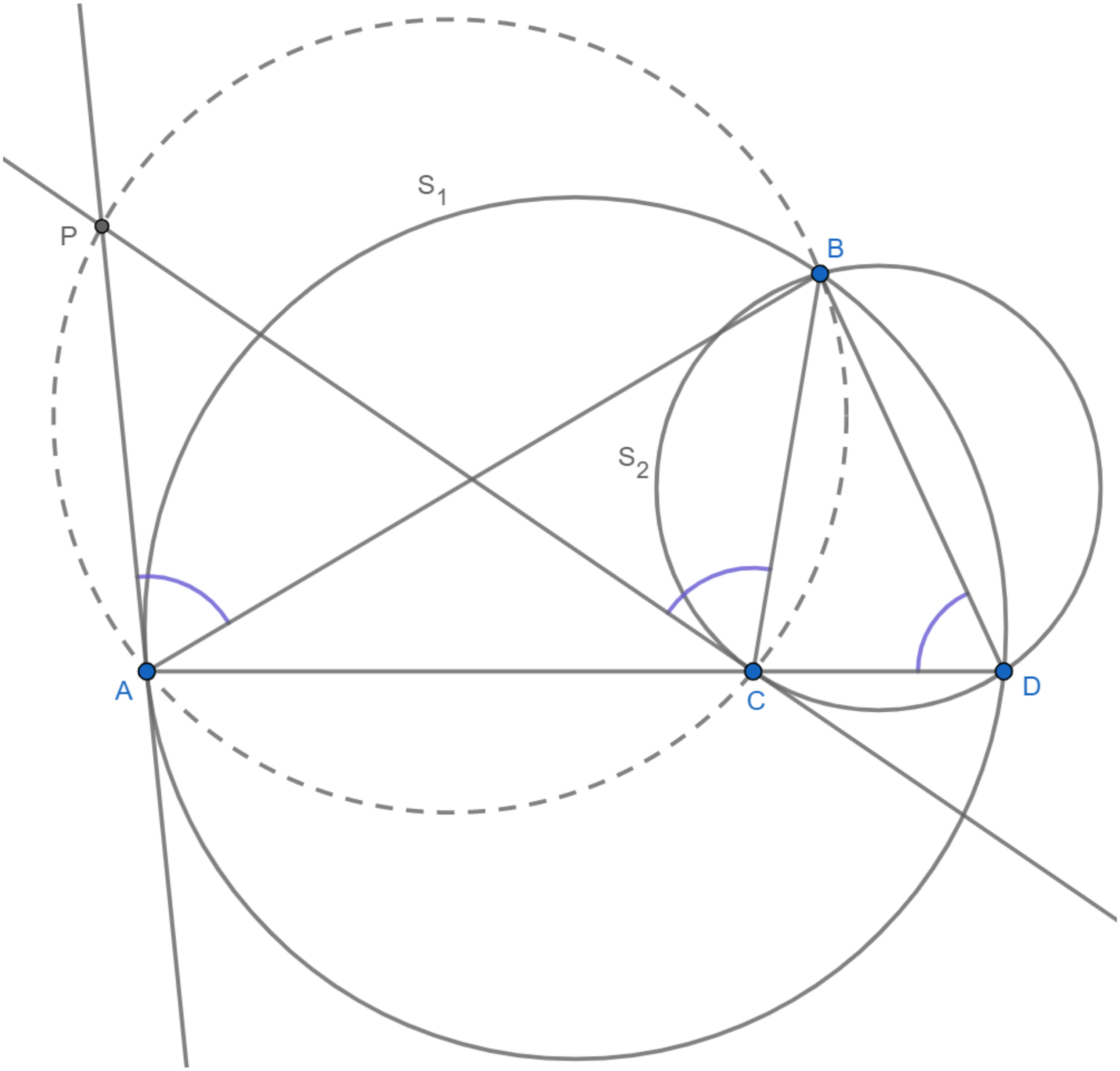
Ответ. 1.

Решение. Так как известно, что все уравнения имеют корни, то можно воспользоваться теоремой Виета. Тогда произведение всех корней будет равно $\frac{c-a}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c-a} = 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

10.4. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C выбрана точка D. Пусть S_1 – окружность, описанная около треугольника ABD, S_2 – окружность, описанная около треугольника CBD. Касательная к окружности S_1, проходящая через точку A, и касательная к окружности S_2, проходящая через точку C, пересекаются в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. По свойству угла между касательной и хордой, угол BAP равен углу BDA. Аналогично, угол BCP равен углу BDC, равному углу BDA. Значит, углы BAP и BCP, опирающиеся на отрезок BP, равны. Но это означает, что четырехугольник $APBC$ можно вписать в окружность. То есть точка P лежит на окружности, проходящей через вершины треугольника ABC. Утверждение доказано.



10.5. Дан «скелет» клетчатого квадрата 10×10 (то есть множество из вертикальных и горизонтальных отрезков, делящих квадрат на квадратики со стороной 1, включая границу квадрата). И этот скелет разбили на уголки (из двух единичных отрезков) и отрезки длины 2 (тоже из двух единичных отрезков). Могло ли «отрезков длины 2» быть ровно 21?

Ответ. Не могло.

Решение. Рассмотрим раскраску отрезков в два цвета: все вертикальные покрасим белым, а все горизонтальные – черным. Тогда в каждом уголке будет ровно по одному белому и одному черному отрезку, а в отрезке длины 2 – два одноцветных отрезка. Заметим, что всего покрашено $10 \cdot 11 = 110$ белых и 110 черных отрезков (всего 220 отрезков длины 1, то есть покрашено 110 фигур). Но 110 – четное число, поэтому уголков будет четное количество. А тогда и отрезков длины 2 также будет четное количество.

11 класс

11.1 Из трехзначного числа A, не содержащего в записи нулей, получили двузначное число B, записав вместо первых двух цифр их сумму (например, число 243 превращается в 63). Найдите A если известно, что $A = 3B$.

Ответ. 135.

Решение. Последняя цифра у чисел B и $A = 3B$ одинакова, поэтому это цифра 5. Кроме того, A делится на 3, значит, B делится на 3 (одинаковые суммы цифр). То есть B — это одно из чисел 15, 45, 75. Проверкой получаем, что условию удовлетворяет число $B = 45$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

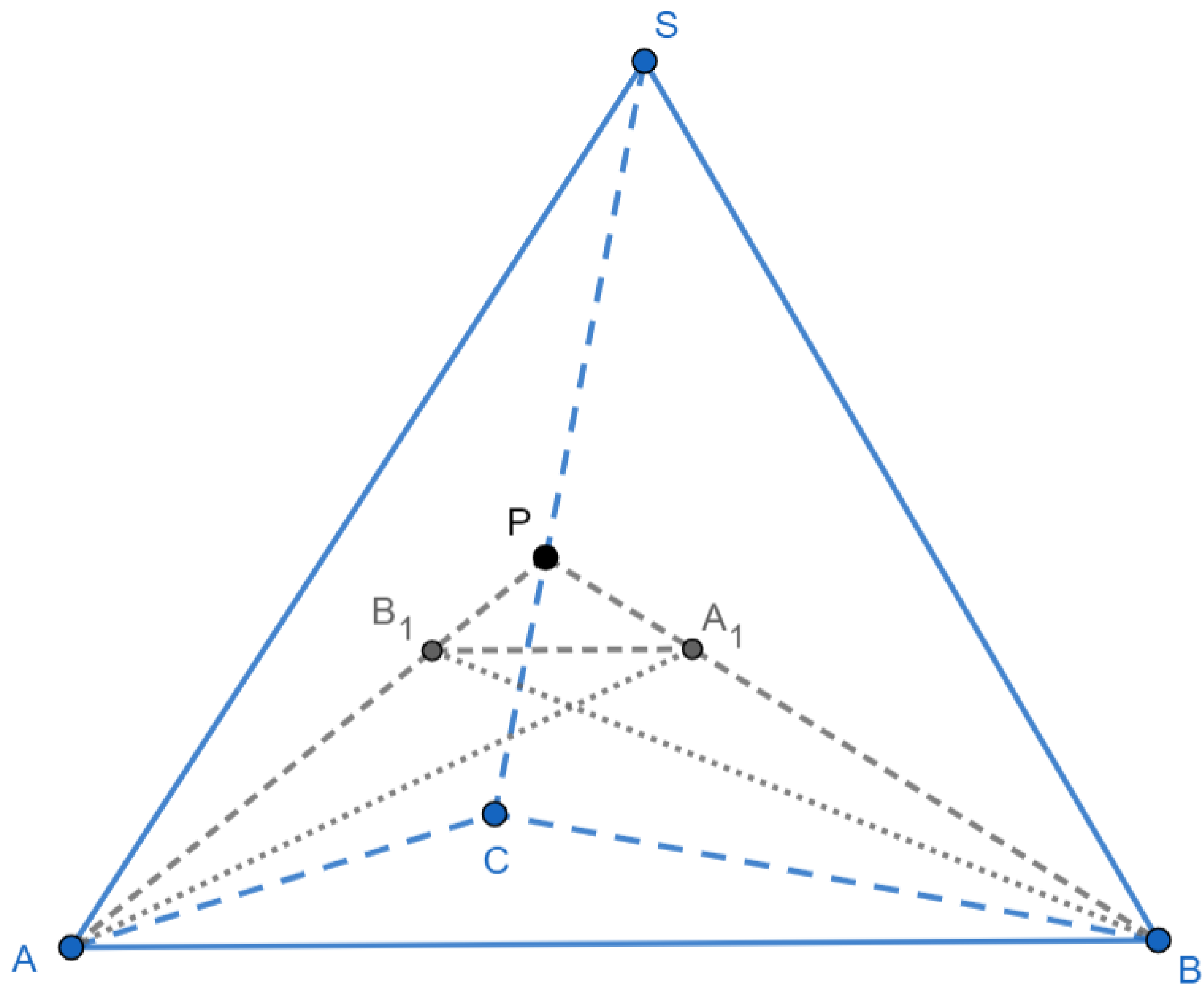
11.2. Для числа x выполняются неравенства $\sin x < \cos\frac{x}{2} < 0$. Докажите, что $\cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Разделив данное неравенство на отрицательное число $\cos\frac{x}{2}$, получаем, что $\sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$. Значит, $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$.

Комментарий. Неэквивалентное преобразование неравенства — 0 баллов за задачу.

11.3. В треугольной пирамиде $SABC$ проведены высоты AA_1 и BB_1. Известно, что отрезок A_1B_1 параллелен ребру AB. Докажите, что некоторые две грани пирамиды имеют одинаковые площади.

Решение. Из параллельности данных отрезков следует, что они лежат в одной плоскости. Тогда в этой же плоскости лежат высоты AA_1 и BB_1 пирамиды. Пусть P – точка пересечения этой плоскости с ребром SC. Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости BSC, поэтому прямая AA_1 перпендикулярна прямой SC. Аналогично прямые BB_1 и SC – перпендикулярны. Но тогда прямая SC перпендикулярна плоскости APB, в частности, она перпендикулярна прямым AP и BP. Отрезки AA_1 и BB_1 – высоты в треугольнике APB. Докажем, что он равнобедренный. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB на равных расстояниях от этого диаметра (из параллельности), поэтому треугольники AA_1B и BB_1A симметричны относительно серединного перпендикуляра к диаметру AB, и потому углы B_1AB и A_1BA равны. То есть треугольник APB — равнобедренный, и $AP = BP$. Но тогда площади треугольников CBS и CAS равны, так как они имеют общее основание SC.



11.4. Прямые $l : y = kx + b$, $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ касаются гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Известно, что $b = b_1 + b_2$. Докажите, что $k \geq 2(k_1 + k_2)$.

Решение. Условие касания означает, что уравнение $\frac{1}{x} = kx+b$, то есть $kx^2+bx-1 = 0$ (и два аналогичных) имеет единственное решение, а это равносильно равенству нулю дискриминанта: $b^2+4k = 0$. Тогда $k = -\frac{1}{4}b^2$, аналогично $k_1 = -\frac{1}{4}b_1^2$, $k_2 = -\frac{1}{4}b_2^2$. Следовательно, $k \geq 2(k_1+k_2)$, что верно в силу неравенства $-\frac{1}{4}(b_1+b_2)^2 \geq 2(-\frac{1}{4}b_1^2 - \frac{1}{4}b_2^2)$, равносильного неравенству $(b_1 - b_2)^2 \geq 0$.

11.5. Дано натуральное число $K > 2$ и набор из N карточек, на которых написаны положительные числа. Оказалось, что из них можно выбрать несколько карточек (возможно, одну) с суммой чисел K, несколько карточек с суммой чисел K^2, $\ldots$, несколько карточек с суммой чисел K^K. Могло ли оказаться, что $N < K$?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что $N < K$. Рассмотрим карточки, которые в сумме дают K^K. Так как их не больше, чем N, то на одной из карточек написано число не меньше чем $K^K/N > K^K/K = K^{K-1}$. Значит, есть карточка, на которой написано число, большее чем K^{K-1}. Эта карточка не может участвовать в суммах с K по

K^{K-1}. Рассмотрев карточки с суммой K^{K-1}, можно показать, что есть карточка, число на которой больше K^{K-2}, но не больше K^{K-1}. Рассуждая аналогично, мы найдем карточку, число на которой больше K^{K-3}, но не больше K^{K-2}, $\ldots$, карточку, число на которой не больше K. То есть мы найдем K различных карточек, что противоречит нашему предположению.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.