## 6 класс

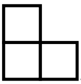
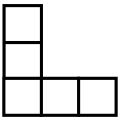
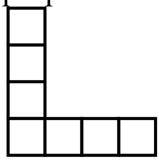
(Время выполнения заданий – 3 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**6.1.** Найдите самое большое шестизначное число, все цифры которого различны, и каждая из цифр, кроме крайних, равна либо сумме, либо разности соседних с ней цифр.

**6.2.** Два велосипедиста собрались доехать из пункта *A* в пункт *B*. Скорость первого из них равна 35 км/ч, второго – 25 км/ч. Известно, что каждый из них ехал только тогда, когда другой отдыхал (стоял на месте), а всего за 2 часа они проехали одинаковое расстояние. Могли ли они доехать за 2 часа до пункта *B*, расположенного на расстоянии 30 км от пункта *A*?

**6.3.** Найдите все решения ребуса: *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* + *ТУК* = *СТУК*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры.

**6.4.** Коля разрезал квадрат 120×120 на уголки видов ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на уголки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 11 уголков больше, чем Коля? (Уголки можно поворачивать.)

**6.5.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

# 7 класс

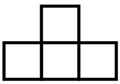
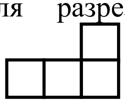
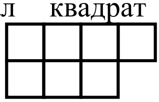
(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**7.1.** Пальмовое масло подорожало на 10%. Из-за этого сыр одного из производителей подорожал на 3%. Какой процент пальмового масла в сыре этого производителя?

**7.2.** Три велосипедиста выезжают из города. Скорость первого из них равна 12 км/ч, второго – 16 км/ч, третьего – 24 км/ч. Известно, что первый из них ехал ровно тогда, когда второй и третий отдыхали (стояли на месте), и что ни в какой момент времени одновременно два велосипедиста не ехали. Также известно, что за 3 часа все трое проехали одинаковое расстояние. Найдите это расстояние.

**7.3.** Число $B$ получается из числа $A$ по следующему правилу: одновременно изменяются все цифры числа $A$. При этом если цифра больше 2, то из нее можно вычесть 2, а если цифра меньше 8, то к ней можно прибавить 2 (например, цифра 4 может быть заменена на 2, либо на 6, а цифра 9 должна быть заменена только на 7). Может ли сумма чисел $A$ и $B$ равняться 2345678?

**7.4.** Коля разрезал квадрат 120×120 на фигурки видов , ,  и , а Вася разрезал такой же квадрат на фигурки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 5 фигурок больше, чем Коля? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

**7.5.** 16 путешественников, каждый из которых лжец или рыцарь (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду), поселились в 3 комнатах гостиницы. Когда все собрались в своих номерах, Василий, проживающий в первом номере, сказал: «В этом номере сейчас находится больше лжецов, чем рыцарей. Хотя нет – в этом номере сейчас находится больше рыцарей, чем лжецов». После чего Василий зашел во второй номер и сказал там те же два утверждения. А после этого он зашел в третий номер и там тоже сказал те же два утверждения. Какое количество рыцарей могло быть среди этих 16 путешественников?

# 8 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**8.1.** Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

**8.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**8.3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) проведена высота $AH$, а из середины $M$ стороны $AB$ опущен перпендикуляр $MK$ на сторону $AC$. Оказалось, что $AH = MK$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $AK = a$.

**8.4.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**8.5.** Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

## 9 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа..

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**9.1.** Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, где $x$ и $y$ – натуральные числа. Если число $x$ увеличить на 2, а число $y$ уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+1$ – квадрат целого числа.

**9.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**9.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $y > 1$.

**9.4.** В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 3×3. В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**9.5.** На данной окружности ω выбрана фиксированная точка $A$. Выберем на окружности две произвольные точки $B$ и $C$, и найдем точку $D$ пересечения биссектрисы угла $ABC$ с окружностью ω. Пусть $K$ – такая точка, что точка $D$ – середина отрезка $AK$. Прямая $KC$ вторично пересекает окружность в точке $P$ ($P \neq C$). Докажите, что точка $P$ не зависит от выбора точек $B$ и $C$.

## 10 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**10.1.** Найдите сумму $\sin x + \sin y + \sin z$, если известно, что $\sin x = \operatorname{tg} y$, $\sin y = \operatorname{tg} z$, $\sin z = \operatorname{tg} x$.

**10.2.** Дано выражение $A = xy + yz + zx$, где $x$, $y$, $z$ – целые числа. Если число $x$ увеличить на 1, а числа $y$ и $z$ уменьшить на 2, то значение выражения $A$ не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A$ – квадрат целого числа.

**10.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^7 > y^6$ и $y^7 > x^6$. Докажите, что $x + y > 2$.

**10.4.** В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**10.5.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH*. Точка *P* симметрична точке *A* относительно прямой *BC*. Прямая *CH* вторично пересекает окружность, описанную около треугольника *ACP*, в точке *K*. Прямая *KP* пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Докажите, что *AC*=*CM*.

## 11 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**11.1.** Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$, где $x$ и $y$ – натуральные числа. Если число $x$ увеличить на 4, а число $y$ уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+4$ – квадрат целого числа.

**11.2.** На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin\alpha$, второе – на $\cos\alpha$, третье – на $\operatorname{tg}\alpha$, четвертое – на $\operatorname{ctg}\alpha$ (для некоторого угла $\alpha$) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

**11.3.** Числа $x$ и $y$ удовлетворяют неравенствам $x^5 > y^4$ и $y^5 > x^4$. Докажите, что $x^3 > y^2$.

**11.4.** Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне *BC*, проведенный через ее середину – точку *M*, пересекает сторону *AB* в точке *K*. Окружность с диаметром *KC* пересекает отрезок *CD* в точке *P* ($P \neq C$). Докажите, что прямые *MP* и *AD* перпендикулярны.

**11.5.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.