

## ЭКОНОМИКА

9 класс

## Задача 1.

(25 баллов)

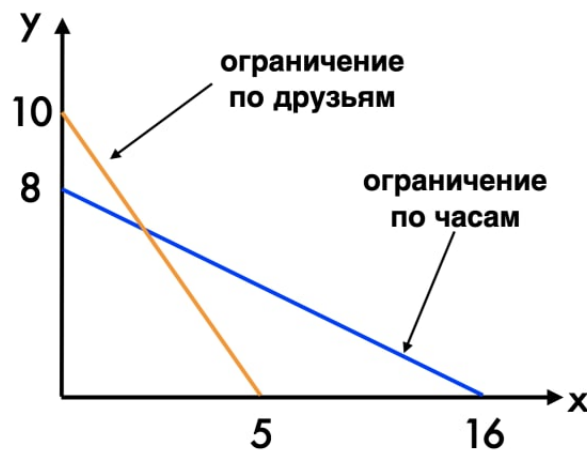
Юный Вениамин решил стать популярным блоггером. Для этого ему требуется записывать смешные тиктоки ( $x$ ) и выпускать собственные короткие песенки ( $y$ ). Вениамин оценил, что для записи одного видео требуется один час и два друга (так как иначе видео получаются не такими интересными). Для выпуска одной песенки ему требуется два часа и помощь одного друга. Всего Вениамин готов выделить 16 часов в день на свои цели, ведь здоровый восьмичасовой сон требуется для творческой души. В распоряжении Вениамина имеется 10 готовых помочь друзей, один друг не может использоваться в создании видео или песенки дважды (например, если друг был уже использован в записи одной песенки, этот друг не может участвовать в создании видео).

Считайте, что все величины абсолютно делимы: Вениамин может привлечь друга на часть съемки, потратить нецелый час, а также создать нецелое видео.

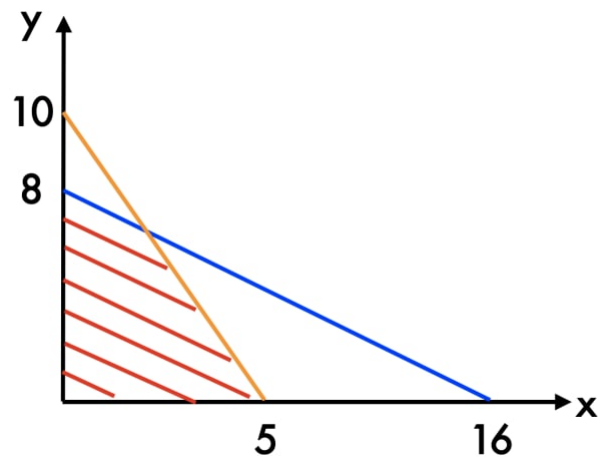
- а) (8 баллов) Постройте кривую производственных возможностей Вениамина (в координатах видео — песенки), отметьте все ключевые точки на графике.
- б) (8 баллов) Вениамину требуется выпускать свое творчество в строгой пропорции: на одну песню приходится два видео. Сколько максимально комплектов из одной песни и двух видео сможет произвести Вениамин?
- в) (9 баллов) Вениамин внезапно стал очень популярным и теперь число друзей, готовых принять участие в его творчестве, выросло в десять раз! Определите, во сколько раз больше комплектов теперь может создать юный блоггер.

## Решение

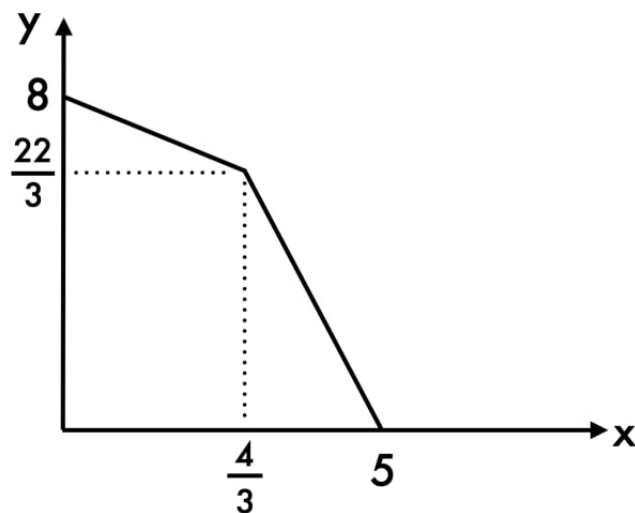
- а) У Вениамина есть два ограничения — по количеству друзей и по количеству часов. Рассмотрим оба этих ограничения. У Вениамина есть 16 часов, на производство одного  $x$  требуется час, а на производство одного  $y$  — два часа. Откуда ограничение по труду можно записать как  $x + 2y = 16$  (2 балла за ограничение). У блоггера есть 10 друзей, на один  $x$  требуется два друга, а на один  $y$  — один друг. Тогда ограничение по друзьям задается в виде  $2x + y = 10$  (2 балла за ограничение). Отметим оба ограничения на графике:



Так как нам необходимо, чтобы выполнялось и ограничение по часам, и по друзьям, нам необходимо взять точки, входящие в оба ограничения (нижнюю огибающую) (2 балла за вывод о нижней огибающей/пересечении множеств):



Тогда итоговая КПВ:



(1 балл за построение КПВ) + (1 балл за ключевые точки)

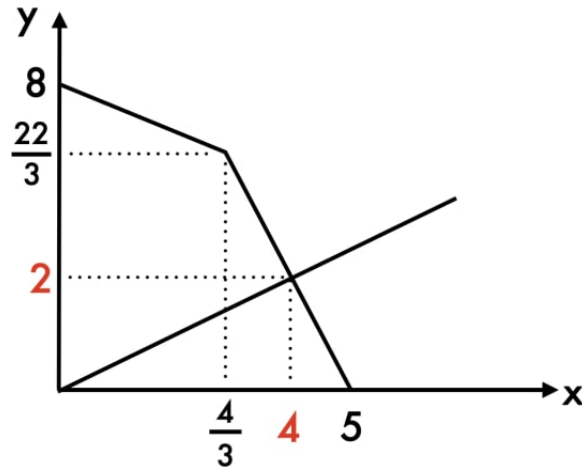
- б) Нам требуется построить луч потребления: на каждый игрек приходится два икса, а значит  $x = 2y$  или  $y = 0.5x$  (2 балла за луч потребления).

Пересечем луч потребления и КПВ. Так как точка изгиба удовлетворяет неравенству  $y > 0.5x$ , то пересечение находится на нижнем участке КПВ (альтернативно можно было рассмотреть оба участка) (2 балла за обоснование пересечения нижнего участка и луча потребления):

$$10 - 2x = 0.5x$$

$$x = 4, \quad y = 2$$

(2 балла за нахождение точки пересечения)



В одном комплекте один  $x$  и два  $y$ , а значит, комплектов будет 2 штуки (2 балла за нахождение количества комплектов).

- в) Теперь новое ограничение по друзьям выглядит как  $2x + y = 100$  (2 балла за ограничение). Заметим, что это ограничение полностью включает в себя ограничение по часам. Значит, друзей нам хватит в любом случае и данное ограничение не будет играть роли. (3 балла за вывод о ненужности ограничения по друзьям)

Тогда единственное ограничение по часам:  $x + 2y = 16$  или  $y = 8 - 0.5x$ . Пересекаем с лучом потребления  $y = 0.5x$ , получаем  $x = 8$ ,  $y = 4$  (1 балла за нахождение оптимальной точки). Тогда количество комплектов будет составлять 4. (1 балла за нахождение количества комплектов)

Количество комплектов увеличилось в два раза. (2 балла за ответ)

## Задача 2.

(25 баллов)

В одном небольшом городе, который пожелал остаться неизвестным, есть три моста, соединяющие правый и левый берега. Множество людей каждый день пересекает данные мосты. В 2021 году чиновники данного города решили ввести выделенные полосы на каждом мосту. Выделенная полоса — это полоса, по которой имеют право ездить только автобусы и такси. Для этого одну из трёх полос закрыли для движения обычных автомобилей. Чтобы показать автомобилистам, что выделенные полосы были крайне полезны, чиновники замерили скорость движения обычного автомобиля в час пик и скорость движения автобуса по выделенной полосе в то же время. Оказалось, что автобус проезжает мост быстрее на 30 минут. После этого чиновники сообщили, что своей инновацией сэкономили гражданам на автобусах целых полчаса!

- а) (10 баллов) Определите, не совершили ли чиновники ошибку в рассуждениях. И если да, укажите явно на нее, рассмотрев контрпример.
- б) (5 баллов) Предложите иной метод оценки эффективности политики и покажите, что его результатам можно доверять.
- в) (5 баллов) Какую цель преследуют чиновники при создании выделенных полос? Приведите один самый важный, на ваш взгляд, аргумент.
- г) (5 баллов) Предположим, в ходе замеров установлено, что в Москве выделенные полосы действительно экономят время для пассажиров общественного транспорта. Значит ли это, что в других городах такая политика также окажется эффективной?

**Решение**

- а) Правительство несомненно ошиблось. Не имеет смысла сравнивать разницу в текущих вариантах и делать из этого вывод о прошлом. **(5 баллов за корректный аргумент)** Действительно, легко представить себе ситуацию, когда изначально и автобусы, и личные авто тратили на проезд 10 минут, далее из-за закрытия одной полосы легковые авто встали в пробку и теперь проезжают за 40 минут, а автобусы все так же едут 10 минут. Таким образом, в реальности эффект от данной политики на время в пути отрицательный. **(5 баллов за корректный контрпример)**
- б) Для точного определения эффекта политики следует сравнить время в пути до создания выделенки и после, а далее сравнить результаты для общественного транспорта. В таком случае мы фиксируем разницу между временем в пути раньше и сейчас, не совершая ошибку сравнения групп после принятия политики. **(5 баллов за корректный аргумент)**
- в) Выделенная полоса — это инструмент, с помощью которого государство стимулирует автомобилистов отказаться от использования личного транспорта, тем самым снизив нагрузку на дороги и сократив выделения вредных веществ в атмосферу. **(5 баллов за корректный аргумент)**
- г) Нет, так как в данном случае мы распространяем результат в одной выборке (одном городе) на другие — такое действие работает не всегда. Например, в городах, где общественного транспорта мало и он редкий, данная политика только приведет к росту пробок и недовольства. **(5 баллов за корректный аргумент)**

**Задача 3.***(25 баллов)*

Бурным трендом последних лет оказывается экономика счастья. Она строится на изучении индикаторов счастья взамен традиционных вроде ВВП или индекса качества жизни. Нашлось даже королевство Бутан, которое ставит улучшение этого показателя в приоритет.

Предположим, в королевстве «ЧЧ» имеются три основных домохозяйства. Доход первого составляет 100 шекелей, доход второго 121, и третьего 144 соответственно. Уровни счастья (по результатам многочисленных опросов и наблюдений) каждого домохозяйства одинаковы и задаются уравнением  $H_i = i \cdot xy^{0,25}$ , где  $i$  — номер домохозяйства от 1 до 3, а  $x$  и  $y$  — объёмы потребления кокосов и бананов в нём. Цена кокосов равна 1 шекелю, а бананов — 4 шекелям. Домохозяйства независимо максимизируют собственные уровни счастья, не выходя за имеющиеся доходы.

- а) **(6 баллов)** Король желает получить статистику по качеству его работы. Определите уровни счастья в каждом из домохозяйств.
- б) **(7 баллов)** Близится ревизия, которая будет проверять минимальный уровень счастья среди домохозяйств. Помогите определить королю, какую минимальную сумму необходимо выдать домохозяйствам, чтоб уровень счастья каждого был не менее 12.
- в) **(12 баллов)** Как оказалось, ревизор будет проверять не минимальный уровень счастья, а его среднее арифметическое по трем домохозяйствам. Определите новую минимальную сумму, чтобы средний уровень счастья был не менее получившегося в предыдущем пункте. Сравните это значение суммы с полученным в предыдущем пункте и дайте экономическую интерпретацию.

## Решение

- а) Функция, которой задаются уровни счастья домохозяйств, имеет специальное название – функция Кобб-Дугласа. В общем случае функции Кобб-Дугласа имеют вид:  $U = cx^a y^b$  и обладают некоторыми интересными свойствами.

Промаксимизируем функцию Кобб-Дугласа в общем виде и найдём оптимальные значения  $x$  и  $y$  с учётом бюджетного ограничения:  $P_x x + P_y y = I$ , где  $P_x$  и  $P_y$  – цены на товары  $x$  и  $y$  соответственно, а  $I$  – доход индивида или домохозяйства.

Из бюджетного ограничения

$$x = \frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y$$

Подставим полученное выражение в функцию полезности, заданную функцией Кобб-Дугласа:

$$U = cy^b \left( \frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^a \rightarrow \max_{x, y \geq 0}$$

$$U'_y = bcy^{b-1} \left( \frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^a + cy^b a \left( -\frac{P_y}{P_x} \right) \left( \frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^{a-1} = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{I}{P_y} \\ y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y} \end{cases}$$

Заметим, что вторая производная отрицательная при  $y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y}$ , а при  $y = 0$  и  $y = \frac{I}{P_y}$  – равна 0. Значит, максимум функции достигается как раз-таки при  $y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y}$  и  $x = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{I}{P_x}$ .

Таким образом, мы нашли, как в общем виде выглядит оптимум для функции полезности вида Кобб-Дугласа. Применим полученный вывод к нашей задаче.

Первое домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 1, I = 100$$

$$x_1^* = \frac{1}{1,25} \cdot \frac{100}{1} = 80$$

$$y_1^* = \frac{0,25}{1,25} \cdot \frac{100}{4} = 5$$

$$H_1 = 80 \cdot 5^{0,25}$$

Второе домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 2, I = 121$$

$$x_2^* = 96,8, y_2^* = 6,05, H_2 = 2 \cdot 96,8 \cdot 6,05^{0,25}$$

Третье домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 3, I = 144$$

$$x_3^* = 115,2, y_3^* = 7,2, H_3 = 3 \cdot 115,2 \cdot 7,2^{0,25}$$

- б) Заметим, что без государственного вмешательства все домохозяйства уже достаточно счастливы, поскольку их уровни счастья превышают 12. Таким образом, королю можно ничего не тратить, то есть его расходы будут равны 0.
- в) Поскольку уровень счастья домохозяйства с самым маленьким уровнем счастья больше 12, то и среднее арифметическое будет больше 12. А, значит, королю снова ничего не нужно тратить, и его траты равны 0.

**Задача 4.**

(25 баллов)

На некотором рынке спрос задаётся уравнением  $Q = 120 - P$  и работает единственная фирма-монополист с функцией издержек  $TC = 80q - \frac{1}{2}q^2$ . По техническим причинам фирма не может произвести более 80 единиц продукции.

- а) **(4 балла)** Найдите оптимум на рынке: какую цену установит фирма, какое количество продаст. Рассчитайте излишек потребителей и прибыль фирмы.
- б) **(6 баллов)** Внезапно на рынок выходит еще одна фирма с точно такой же функцией издержек (и точно таким же ограничением на производство не более 80 единиц продукции). Фирмы принимают решение о выпуске независимо друг от друга и одновременно. Таким образом, спрос на рынке можно переписать в виде  $P = 120 - q_1 - q_2$ , где  $q_1$  и  $q_2$  – выпуски первой и второй фирм, соответственно. Назовем равновесием такой выбор количества каждой фирмой, что ни одной из них невыгодно пересмотреть свой выпуск после того, как она узнала выпуск другой фирмы.

Для каждого равновесия на рынке найдите значение цены, а также излишка потребителей.

- в)
- (6 баллов)** Предположим, сложилось такое равновесие, при котором первая фирма занимает долю  $\alpha$  рынка, а вторая фирма, соответственно, долю  $(1 - \alpha)$ . Найдите прибыли каждой фирмы. Как общественное благосостояние (сумма излишков потребителей и производителей) зависит от параметра  $\alpha$ ? При каком значении  $\alpha$  достигается максимум общественного благосостояния?
  - (5 баллов)** Предположим, первая фирма добилась законодательной поддержки и теперь она назначает выпуск первой, а далее вторая фирма, узнав выпуск первой, принимает решение о своем производстве. Найдите, какой выпуск назначит каждая фирма, цену на рынке и общественное благосостояние.
- г) **(4 балла)** Сравните общественное благосостояние, найденное в пункте а) (для некоторого значения  $\alpha \in [0, 1]$ ), с общественным благосостоянием в пункте б). Как вы думаете, из-за чего наблюдается именно такое соотношение?

**Решение**

- а) Прибыль фирмы можно записать как

$$\pi = TR - TC = (120 - q)q - 80q + 0.5q^2 = 40q - 0.5q^2$$

Это парабола с ветвями вниз, максимум в вершине: **(1 балл за доказательство максимума)**

$$q^* = 40$$

$$P^* = 80$$

**(1 балл за нахождение цены и количества)**

Излишек потребителя считается как площадь треугольника, образованного прямой спроса, осью  $OP$  и прямой  $P = P^* = 80$ . Его площадь составляет  $CS = 0.5 \cdot (120 - 80) \cdot 40 = 800$ .

**(1 балл за нахождение излишка потребителей)**

Прибыль фирмы составляет  $\pi = 40 \cdot 40 - 0.5 \cdot 40^2 = 800$ . **(1 балл за нахождение прибыли)**

- б) Теперь фирмы одновременно принимают решение о выпуске. Рассмотрим прибыль первой фирмы:

$$\pi_1 = (120 - q_1 - q_2)q_1 - 80q_1 + 0.5q_1^2 = -0.5q_1^2 + (40 - q_2)q_1$$

**(1 балл за нахождение функции прибыли)**

Выпуск второй фирмы первая воспринимает как заданный. Тогда промаксимизируем прибыль первой фирмы по  $q_1$ , это парабола ветвями вниз: **(1 балл за доказательство максимума)**

$$q_1^* = 40 - q_2$$

**(1 балл за нахождение оптимума первой фирмы)**

Аналогично находим оптимум второй фирмы:

$$q_2^* = 40 - q_1$$

Заметим, что данные уравнения имеют множество корней:

$$q_1^* + q_2^* = 40$$

**(1 балл за нахождение уравнения оптимальных количеств)**

Таким образом, в равновесии общий выпуск на рынке составит 40, цена будет равна 80 **(1 балл за нахождение общего выпуска и цены)**. Так как цена и количество по сравнению с предыдущим пунктом не изменились, излишек потребителей не изменился и составил 800. **(1 балл за нахождение излишка потребителей)**

- в) 1. Тогда первая фирма произведет  $40\alpha$ , а вторая —  $40(1 - \alpha)$ . Прибыль первой фирмы составит  $800\alpha^2$ , а второй —  $800(1 - \alpha)^2$ .

**(1 балл за нахождение прибылей)**

Тогда суммарное общественное благосостояние составляет (излишек потребителя 800 из предыдущего пункта):

$$SW = 800 + 800\alpha^2 + 800(1 - \alpha)^2 = 1600 + 1600(\alpha^2 - \alpha)$$

**(2 балла за нахождение уравнения общественного благосостояния)**

Это парабола с ветвями вверх и минимумом в вершине:  $\alpha = 0.5$ . Таким образом, начиная с  $\alpha = 0$  прибыль снижается пока  $\alpha$  не сравняется с 0.5. Далее прибыль растет до  $\alpha = 1$ , где прибыль сравнивается со значением в точке  $\alpha = 0$ , так как парабола симметрична относительно корней.

**(2 балла за анализ функции в зависимости от  $\alpha$ )**

При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  достигается максимум общественного благосостояния.

**(1 балл за нахождение оптимальных значений)**

2. Вторая фирма воспринимает выпуск первой как заданный, а значит будет действовать как раньше:  $q_2 = 40 - q_1$ . Тогда прибыль первой фирмы:

**(1 балл за нахождение кривой реакции второй фирмы)**

$$\pi_1 = (120 - q_1 - (40 - q_1))q_1 - 80q_1 + 0.5q_1^2 = 0.5q_1^2$$

**(1 балл за нахождение прибыли первой фирмы)**

Моноotonно возрастает по  $q_1$ . При этом, если  $q_1 \geq 40$ , то вторая фирма производит ноль и первая становится монополистом, а значит, выбирает выпуск 40 (как в первом пункте). Таким образом, первая фирма выбирает выпуск 40.

**(2 балла за анализ и нахождение выпуска первой фирмы)**

Результат полностью совпадает с первым пунктом, цена составляет 80, количество 40, прибыль 800 и излишек потребителя 800.

**(1 балл за нахождение оптимальных значений)**

- г) Общественное благосостояние в предыдущем пункте составило  $SW_2 = 1600$ . В пункте а) оно составило

$$SW_1 = 1600 + 1600(\alpha^2 - \alpha) = 1600 - 1600\alpha(1 - \alpha)$$

Заметим, что  $SW_2$  всегда нестрого больше  $SW_1$ . **(1 балл за сравнение)**

А значит, ограничение конкуренции привело к увеличению общественного благосостояния. Это происходит из-за того, что у фирм положительные эффекты от масштаба: предельные издержки снижаются при росте выпуска. Таким образом, эффективно, чтобы одна фирма производила как можно больше, так как тем самым снижаются издержки и растет общественное благосостояние.

**(3 балла за комментарий)**