

ЭКОНОМИКА

10 класс

Задача 1.

(25 баллов)

Бурным трендом последних лет оказывается экономика счастья. Она строится на изучении индикаторов счастья взамен традиционных вроде ВВП или индекса качества жизни. Нашлось даже королевство Бутан, которое ставит улучшение этого показателя в приоритет.

Предположим, в королевстве «ЧЧ» имеются три основных домохозяйства. Доход первого составляет 100 шекелей, доход второго 121, и третьего 144 соответственно. Уровни счастья (по результатам многочисленных опросов и наблюдений) каждого домохозяйства одинаковы и задаются уравнением $H_i = i \cdot xy^{0,25}$, где i – номер домохозяйства от 1 до 3, а x и y – объёмы потребления кокосов и бананов в нём. Цена кокосов равна 1 шекелю, а бананов – 4 шекелям. Домохозяйства независимо максимизируют собственные уровни счастья, не выходя за имеющиеся доходы.

- (6 баллов)** Король желает получить статистику по качеству его работы. Определите уровни счастья в каждом из домохозяйств.
- (7 баллов)** Близится ревизия, которая будет проверять минимальный уровень счастья среди домохозяйств. Помогите определить королю, какую минимальную сумму необходимо выдать домохозяйствам, чтоб уровень счастья каждого был не менее 12.
- (12 баллов)** Как оказалось, ревизор будет проверять не минимальный уровень счастья, а его среднее арифметическое по трем домохозяйствам. Определите новую минимальную сумму, чтобы средний уровень счастья был не менее получившегося в предыдущем пункте. Сравните это значение суммы с полученным в предыдущем пункте и дайте экономическую интерпретацию.

Решение

- Функция, которой задаются уровни счастья домохозяйств, имеет специальное название – функция Кобб-Дугласа. В общем случае функции Кобб-Дугласа имеют вид: $U = cx^a y^b$ и обладают некоторыми интересными свойствами.

Промаксимизируем функцию Кобб-Дугласа в общем виде и найдём оптимальные значения x и y с учётом бюджетного ограничения: $P_x x + P_y y = I$, где P_x и P_y – цены на товары x и y соответственно, а I – доход индивида или домохозяйства.

Из бюджетного ограничения

$$x = \frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y$$

Подставим полученное выражение в функцию полезности, заданную функцией Кобб-Дугласа:

$$U = cy^b \left(\frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^a \rightarrow \max_{x,y \geq 0}$$

$$U'_y = bcy^{b-1} \left(\frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^a + cy^b a \left(-\frac{P_y}{P_x} \right) \left(\frac{I}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} y \right)^{a-1} = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{I}{P_y} \\ y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y} \end{cases}$$

Заметим, что вторая производная отрицательная при $y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y}$, а при $y = 0$ и $y = \frac{I}{P_y}$ – равна 0. Значит, максимум функции достигается как раз-таки при $y = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{I}{P_y}$ и $x = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{I}{P_x}$.

Таким образом, мы нашли, как в общем виде выглядит оптимум для функции полезности вида Кобб-Дугласа. Применим полученный вывод к нашей задаче.

Первое домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 1, I = 100$$

$$x_1^* = \frac{1}{1,25} \cdot \frac{100}{1} = 80$$

$$y_1^* = \frac{0,25}{1,25} \cdot \frac{100}{4} = 5$$

$$H_1 = 80 \cdot 5^{0,25}$$

Второе домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 2, I = 121$$

$$x_2^* = 96,8, y_2^* = 6,05, H_2 = 2 \cdot 96,8 \cdot 6 \cdot 05^{0,25}$$

Третье домохозяйство:

$$a = 1, b = 0,25, c = 3, I = 144$$

$$x_3^* = 115,2, y_3^* = 7,2, H_3 = 3 \cdot 115,2 \cdot 7 \cdot 2^{0,25}$$

- б) Заметим, что без государственного вмешательства все домохозяйства уже достаточно счастливы, поскольку их уровни счастья превышают 12. Таким образом, королю можно ничего не тратить, то есть его расходы будут равны 0.
- в) Поскольку уровень счастья домохозяйства с самым маленьким уровнем счастья больше 12, то и среднее арифметическое будет больше 12. А, значит, королю снова ничего не нужно тратить, и его траты равны 0.

Задача 2.

(25 баллов)

На некотором рынке спрос задаётся уравнением $Q = 120 - P$ и работает единственная фирма-монополист с функцией издержек $TC = 80q - \frac{1}{2}q^2$. По техническим причинам фирма не может произвести более 80 единиц продукции.

- а) (4 балла) Найдите оптимум на рынке: какую цену установит фирма, какое количество продаст. Рассчитайте излишек потребителей и прибыль фирмы.
- б) (6 баллов) Внезапно на рынок выходит еще одна фирма с точно такой же функцией издержек (и точно таким же ограничением на производство не более 80 единиц продукции). Фирмы принимают решение о выпуске независимо друг от друга и одновременно. Таким образом, спрос на рынке можно переписать в виде $P = 120 - q_1 - q_2$, где q_1 и q_2 – выпуски первой и второй фирм, соответственно. Назовем равновесием такой выбор количества каждой фирмой, что ни одной из них невыгодно пересмотреть свой выпуск после того, как она узнала выпуск другой фирмы.

Для каждого равновесия на рынке найдите значение цены, а также излишка потребителей.

в)

1. **(6 баллов)** Предположим, сложилось такое равновесие, при котором первая фирма занимает долю α рынка, а вторая фирма, соответственно, долю $(1 - \alpha)$. Найдите прибыли каждой фирмы. Как общественное благосостояние (сумма излишков потребителей и производителей) зависит от параметра α ? При каком значении α достигается максимум общественного благосостояния?
2. **(5 баллов)** Предположим, первая фирма добилаь законодательной поддержки и теперь она назначает выпуск первой, а далее вторая фирма, узнав выпуск первой, принимает решение о своем производстве. Найдите, какой выпуск назначит каждая фирма, цену на рынке и общественное благосостояние.

г) **(4 балла)** Сравните общественное благосостояние, найденное в пункте а) (для некоторого значения $\alpha \in [0, 1]$), с общественным благосостоянием в пункте б). Как вы думаете, из-за чего наблюдается именно такое соотношение?

Решение

а) Прибыль фирмы можно записать как

$$\pi = TR - TC = (120 - q)q - 80q + 0.5q^2 = 40q - 0.5q^2$$

Это парабола с ветвями вниз, максимум в вершине: **(1 балл за доказательство максимума)**

$$q^* = 40$$

$$P^* = 80$$

(1 балл за нахождение цены и количества)

Излишек потребителя считается как площадь треугольника, образованного прямой спроса, осью OP и прямой $P = P^* = 80$. Его площадь составляет $CS = 0.5 \cdot (120 - 80) \cdot 40 = 800$.

(1 балл за нахождение излишка потребителей)

Прибыль фирмы составляет $\pi = 40 \cdot 40 - 0.5 \cdot 40^2 = 800$. **(1 балл за нахождение прибыли)**

б) Теперь фирмы одновременно принимают решение о выпуске. Рассмотрим прибыль первой фирмы:

$$\pi_1 = (120 - q_1 - q_2)q_1 - 80q_1 + 0.5q_1^2 = -0.5q_1^2 + (40 - q_2)q_1$$

(1 балл за нахождение функции прибыли)

Выпуск второй фирмы первая воспринимает как заданный. Тогда промаксимизируем прибыль первой фирмы по q_1 , это парабола ветвями вниз: **(1 балл за доказательство максимума)**

$$q_1^* = 40 - q_2$$

(1 балл за нахождение оптимума первой фирмы)

Аналогично находим оптимум второй фирмы:

$$q_2^* = 40 - q_1$$

Заметим, что данные уравнения имеют множество корней:

$$q_1^* + q_2^* = 40$$

(1 балл за нахождение уравнения оптимальных количеств)

Таким образом, в равновесии общий выпуск на рынке составит 40, цена будет равна 80 **(1 балл за нахождение общего выпуска и цены)**. Так как цена и количество по сравнению с предыдущим пунктом не изменились, излишек потребителей не изменился и составил 800. **(1 балл за нахождение излишка потребителей)**

- в) 1. Тогда первая фирма произведет 40α , а вторая — $40(1 - \alpha)$. Прибыль первой фирмы составит $800\alpha^2$, а второй — $800(1 - \alpha)^2$.

(1 балл за нахождение прибылей)

Тогда суммарное общественное благосостояние составляет (излишек потребителя 800 из предыдущего пункта):

$$SW = 800 + 800\alpha^2 + 800(1 - \alpha)^2 = 1600 + 1600(\alpha^2 - \alpha)$$

(2 балла за нахождение уравнения общественного благосостояния)

Это парабола с ветвями вверх и минимумом в вершине: $\alpha = 0.5$. Таким образом, начиная с $\alpha = 0$ прибыль снижается пока α не сравняется с 0.5. Далее прибыль растет до $\alpha = 1$, где прибыль сравнивается со значением в точке $\alpha = 0$, так как парабола симметрична относительно корней.

(2 балла за анализ функции в зависимости от α)

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ достигается максимум общественного благосостояния.

(1 балл за нахождение оптимальных значений)

2. Вторая фирма воспринимает выпуск первой как заданный, а значит будет действовать как раньше: $q_2 = 40 - q_1$. Тогда прибыль первой фирмы:

(1 балл за нахождение кривой реакции второй фирмы)

$$\pi_1 = (120 - q_1 - (40 - q_1))q_1 - 80q_1 + 0.5q_1^2 = 0.5q_1^2$$

(1 балл за нахождение прибыли первой фирмы)

Монотонно возрастает по q_1 . При этом, если $q_1 \geq 40$, то вторая фирма производит ноль и первая становится монополистом, а значит, выбирает выпуск 40 (как в первом пункте). Таким образом, первая фирма выбирает выпуск 40.

(2 балла за анализ и нахождение выпуска первой фирмы)

Результат полностью совпадает с первым пунктом, цена составляет 80, количество 40, прибыль 800 и излишек потребителя 800.

(1 балл за нахождение оптимальных значений)

- г) Общественное благосостояние в предыдущем пункте составило $SW_2 = 1600$. В пункте а) оно составило

$$SW_1 = 1600 + 1600(\alpha^2 - \alpha) = 1600 - 1600\alpha(1 - \alpha)$$

Заметим, что SW_2 всегда нестрого больше SW_1 . **(1 балл за сравнение)**

А значит, ограничение конкуренции привело к увеличению общественного благосостояния. Это происходит из-за того, что у фирм положительные эффекты от масштаба: предельные издержки снижаются при росте выпуска. Таким образом, эффективно, чтобы одна

фирма производила как можно больше, так как тем самым снижаются издержки и растет общественное благосостояние.

(3 балла за комментарий)

Задача 3.

(25 баллов)

Рассмотрим монетарную политику в реальном мире и ее последствия. Вы наверняка знаете, что одним из основных инструментов монетарной политики является ключевая ставка (ставка, по которой коммерческие банки могут брать кредиты у центрального банка). При этом в школьной олимпиадной экономике постоянно речь идет о норме обязательных резервов, хотя на практике она почти никогда не изменяется.

- а) **(5 баллов)** Как вы думаете, почему норма обязательных резервов как инструмент монетарной политики почти не используется? Приведите одно содержательное объяснение.
- б) **(10 баллов)** Многие инвесторы каждый раз с замиранием сердца следят за собранием директоров центрального банка и пытаются предсказать, как будет изменена ключевая ставка. Это происходит из-за того, что значение ключевой ставки влияет как на стоимость акций, так и на стоимость облигаций. Объясните оба механизма: какой эффект оказывает изменение ключевой ставки на цену акции и какой — на цену облигации.
- в) **(10 баллов)** Предположим, вам нравится текущая доходность облигаций (например, ОФЗ России — облигаций Министерства финансов РФ). Вы решили купить одну из двух бумаг: краткосрочную облигацию (срок окончания до года) или долгосрочную облигацию (больше года до окончания). Как вы думаете, у какой из облигаций больший риск при неожиданном повышении ключевой ставки в будущем?

Решение

- а) Данная мера монетарной политики непредсказуема — например, при понижении нормы обязательного резервирования, как изменятся избыточные резервы банка? Они могут уменьшиться, увеличиться или не измениться. Просчитать данный эффект попросту невозможно. **(5 баллов за корректный аргумент)**
- б) При повышении ключевой ставки инвесторы требуют большую доходность от облигации. Доходность облигации зависит от текущей цены, чтобы доходность выросла, необходимо, чтобы цена облигации упала. Этот эффект наблюдается из-за того, что ставки по вкладам растут и часть владельцев облигации их продают, тем самым увеличивая предложение. **(5 баллов за корректный аргумент про облигации)**
Акции в среднем также дешевеют, потому что инвесторы выходят из рискованных активов (акции) и уходят в безрисковые или менее рискованные активы (облигации). Это происходит из-за того, что облигации теперь приносят большую доходность и альтернативные издержки вложения в акцию растут. Но отдельные акции могут дорожать (например, стабильные компании с крепкой экономикой), так как их рискованность близка к облигациям. Инвесторы покупают такие низкорискованные акции, увеличивая спрос на них. **(5 баллов за корректный аргумент про акции)**
- в) Повышение ключевой ставки приводит к сильному падению стоимости долгих облигаций, так как инвесторы выходят из них (действительно, инвесторы требуют большей доходности, а значит, текущая цена облигации снижается). У вас тем не менее уже есть на руках данная облигация и соответственно, вы всегда можете зафиксировать исходную доходность (иными словами, дождаться конца срока облигации и получить выплаты от

эмитента). Тем не менее, если вы захотите продать данную облигацию раньше срока, вероятно, вам придется продать ее по более низкой рыночной цене, так как текущая цена упала. **(5 баллов за корректный аргумент про долгосрочные облигации)**

Короткие облигации имеют меньшую продолжительность жизни, а значит, инвестору легче продержаться бумагу до конца ее срока, тем самым зафиксировав исходную доходность. В противовес долгим облигациям, которые сильно зависят от ключевой ставки, короткие облигации менее волатильны, так как срок экспирации наступает скорее. Таким образом, и колебания цены короткой облигации в зависимости от ключевой ставки сильно меньше. **(5 баллов за корректный аргумент про краткосрочные облигации)**

Задача 4.

(25 баллов)

Рассмотрим рынок некоторого товара x . Рыночный спрос на товар x задаётся уравнением $q^d = 100 - 2P$, где q – количество товара, а P – его цена. На рынке действует две фирмы с издержками $TC = 25q$. Первая фирма выбирает количество q , тогда как вторая фирма выбирает цену P . Фирмы делают свой выбор одновременно и независимо.

- (10 баллов)** Допустим, вторая фирма выбрала цену. Тогда первая фирма воспринимает спрос как $\min\{P, 50 - 12q\}$. Найдите лучший ответ первой фирмы на цену второй фирмы, то есть функцию $q(P)$.
- (5 баллов)** Теперь допустим, что первая фирма выбрала количество, тогда по цене P у второй фирмы купят $100 - 2P - q$, если $P \leq 50 - \frac{1}{2}q$, и ничего не купят при других ценах. Найдите лучший ответ второй фирмы на количество первой фирмы, то есть функцию $P(q)$.
- (5 баллов)** Назовём равновесием ситуацию, когда ни одной из двух фирм невыгодно отклоняться от выбранной цены и количества. Найдите равновесие на данном рынке.

Решение

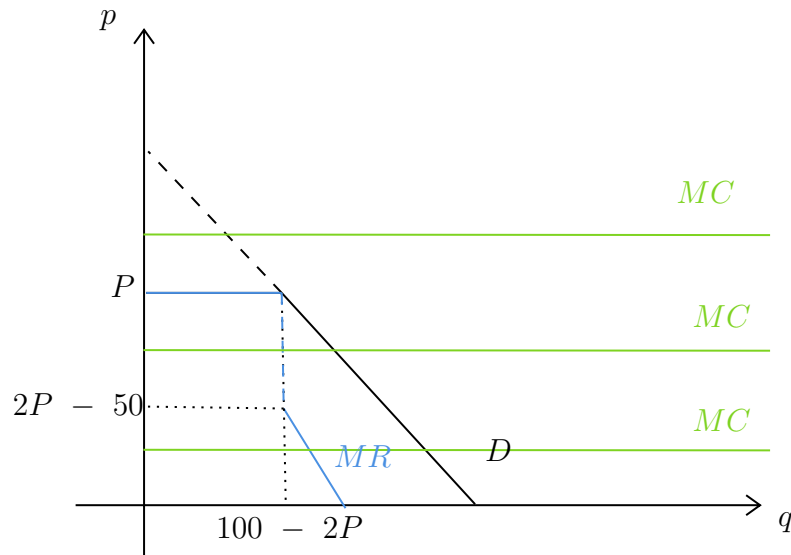
а) Найдем, какой будет MR .

- Если $q < 100 - 2P$, то $MR = P$, так как цену назначать мы не можем и являемся ценополучателям.
- Если $q \geq 100 - 2P$, то $MR = TR' = ((50 - \frac{1}{2}q)q)' = (50q - \frac{q^2}{2})' = 50 - q$

Значит

$$MR = \begin{cases} P, & q < 100 - 2P \\ 50 - q, & q \geq 100 - 2P \end{cases}$$

Найдем оптимальное количество. Нарисовав график мы сможем понять, что у надо рассмотреть три случая для P



- $P < 25$: MR всегда ниже, чем MC, поэтому производим $q = 0$
- $P \geq 25$ и $2P - 50 < 25 \Leftrightarrow P < 37.5$, то $q < 100 - 2P$
- Если $2P - 50 \geq 25 \Leftrightarrow P \geq 37.5$, то

$$MR = MC \Rightarrow 50 - q = 25 \Rightarrow q = 25$$

Объединяя все участки получаем решение

$$q^* = \begin{cases} 0, & P < 25 \\ 100 - 2P, & P \in [25, 37.5) \\ 25, & P \geq 37.5 \end{cases}$$

б) Запишем прибыль нашей фирмы

$$\pi = \begin{cases} (100 - 2P - q)(P - 25), & P \leq 50 - \frac{1}{2}q \\ 0, & P > 50 - \frac{1}{2}q \end{cases}$$

В первом случае это парабола ветвями вниз, поэтому вершина это максимум. Также из-за симметричности параболы можно посчитать вершину как середина между корням $\frac{100-q}{2}$ и 25.

$$P = \frac{25 + \frac{100-q}{2}}{2} = 37.5 - \frac{q}{4}$$

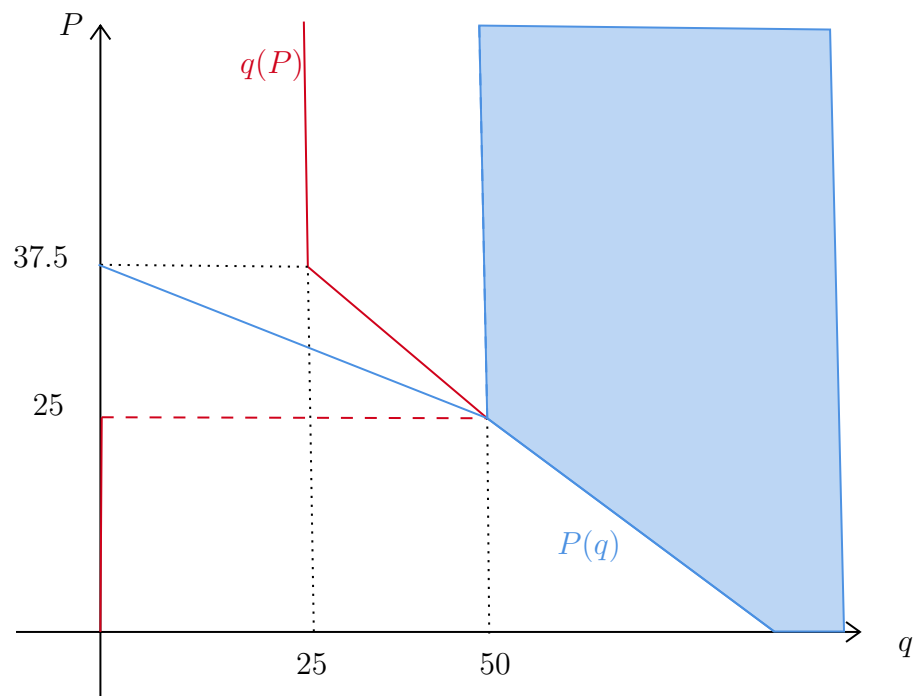
Тогда должны проверить условие

$$37.5 - \frac{q}{4} \leq 50 - \frac{1}{2}q \Rightarrow q \leq 50$$

Если $q > 50$, то выбираем $p = 50 - \frac{1}{2}q$ на ограничении. Тогда наша прибыль ноль. На втором участке любая цена будет оптимальной, если она больше чем $50 - \frac{1}{2}q$ Получаем ответ

$$P = \begin{cases} 37.5 - \frac{q}{4}, & q \leq 50 \\ \forall p \geq 50 - \frac{q}{2}, & q > 50 \end{cases}$$

в) Нарисуем кривые реакции



Заметим, что они пересекаются в точке $(50, 25)$. Это будет равновесие, так как никому не выгодно отклониться