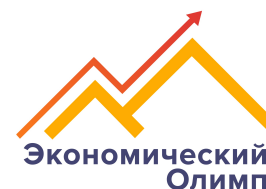


# КПВ

Л.Зорин, А. Бекбулатов



## Полезная информация

**Определение 1.** Область производственных возможностей (ОПВ) - всевозможные наборы благ, которые можно произвести

**Определение 2.** Кривая производственных возможностей (КПВ) - верхний контур ОПВ. Достигается при эффективном использовании ресурсов (нельзя произвести больше одного товара, не произведя меньше другого)

**Определение 3.** Альтернативная стоимость (альтернативные издержки) - от какого количества единиц другого блага (например, блага  $Y$ ) нужно отказаться для производства одной дополнительной единицы первого блага (например, блага  $X$ )

**Определение 4.** Абсолютное преимущество - возможность производить товар дешевле, чем другие страны

**Определение 5.** Сравнительное преимущество - производство товара с меньшей альтернативной стоимостью, чем другие страны.

## Обязательные задачи

### Задача 1.

Альтернативная стоимость выращивания 2 т пшеницы равна 5 т картофеля при максимальном объеме выращиваемого картофеля, равном 1000 т. Постройте кривую производственных возможностей фермера.

### Задача 2.

В одной далекой-далекой и очень маленькой стране имелось всего лишь 20 единиц труда, готовых работать по 40 часов в неделю. За один час один рабочий мог произвести 2 единицы товара  $x$  или 5 единиц товара  $y$  с постоянной альтернативной стоимостью. Запишите функцию КПВ (сколько товаров изготовят за неделю) и постройте ее график.

### Задача 3.

КПВ задана уравнением:  $y = 18 - 3x$  найти альтернативную стоимость:

- третьей единицы продукции  $x$ ;
- трех первых единиц продукции  $x$ ;
- второй единицы продукции  $y$  (попробуйте решить, не выражая  $x$ );
- трех первых единиц продукции  $y$ .

### Задача 4.

Пусть КПВ страны задаётся уравнением  $Y = 100 - X^2$ .

- а) Найдите оптимальный объём производства, если отношение цены товара  $X$  к цене товара  $Y$  равно 10.
- б) Пусть теперь население страны хочет потреблять товары исключительно в пропорции 9 штук  $Y$  к 2 штукам  $X$ . Найдите новый оптимальный объём производства.

### Задача 5.

Сегодня пятница, Робинзон проснулся рано утром (впереди еще целых 8 часов до захода солнца) и он полон сил (он оценивает свои силы в 10 единиц). Чтобы поймать одну рыбу, нужно потратить 2 часа и 1 ед. силы. Кокосы можно собирать быстрее, но и сил нужно больше: 1 час и 2 ед. силы на 1 кокос. Постройте КПВ Робинзона.

### Задача 6.

Робинзон работает 40 часов в неделю. Голыми руками он может добыть одну рыбу или один кокос в час. Робинзон также может связать сеть - на это потребуются 15 часов, но тогда он сможет ловить по 2 рыбы в час. Также он может построить лестницу - на нее тоже понадобится 15 часов и она поможет собирать по 2 кокоса в час. Постройте КПВ.

### Задача 7.

Корабль, на котором плыл Робинзон, потерпел кораблекрушение, и он оказался на маленьком необитаемом острове в океане. У него оказалось два полностью разряженных мобильных телефона, Samsung и Nokia, одно автономное зарядное устройство (АЗУ) и часы с секундомером.

Для каждой минуты использования телефона Nokia нужно заряжать его 1 минуту, а для каждой минуты использования телефона Samsung нужно заряжать его 2 минуты. Всего АЗУ может работать не более 12 минут, которые можно распределить между телефонами в любой пропорции. SIM-карты, установленные в телефонах, подключены к общему лицевого счету, на котором осталось \$12. Но тарифы на SIM-картах разные: стоимость минуты соединения с телефона Samsung составляет \$1, а минута соединения с телефона Nokia обходится на 50% дороже. Менять SIM-карты в телефонах местами нельзя.

Как должен действовать Робинзон, чтобы получить возможность говорить по телефону максимальное количество времени?

## Сложные задачи

### Задача 8.

Как-то раз пенсионер Иван Иванович решил заработать денег (чем больше, чем лучше). Единственный способ сделать это — собирать грибы и ловить рыбу, а затем продавать их на рынке по сложившимся там ценам. В день он может работать не больше 5 часов (всё остальное время тратится на дорогу до рынка и обратно, а также на другие необходимые дела). Грибы он собирает с постоянной скоростью 1 кг/час. Если рыба прикармлена, то улов рыбы зависит от потраченного на ужение времени следующим образом:  $x = 2\sqrt{t_x}$  (где  $t_x$  измеряется в часах, а  $x$  — в килограммах). Если рыба не прикармлена, Иван Иванович вообще ничего не поймает. Изготовление прикормки занимает 1 час; прикормка действует только на один день.

- а) Откладывая по оси  $x$  количество выловленной рыбы (в кг), а по оси  $y$  — количество собранных грибов (в кг), изобразите множество всех пар  $(x, y)$ , доступных Ивану Ивановичу для продажи (т.е. изобразите его область производственных возможностей).
- б) Пусть на рынке рыба продаётся по цене  $P_x$  руб./кг, а грибы — по цене  $P_y$  руб./кг. При каких  $P_x$  и  $P_y$  Иван Иванович выловит ровно 1 кг рыбы?

**Задача 9.**

В стране  $N$ , разделенной на регионы  $W$  и  $E$ , введены суровые таможенные правила относительно ввоза на ее территорию продуктов питания. Если кто-то пытается ввезти продукты незаконно, то весь контрафакт изымается и уничтожается по одной из двух технологий. Будем считать, что вся еда, импортируемая в эту страну, делится на два типа — сыр пармезан и персики.

В регионе  $W$  незаконно ввезенную еду раскатывают бульдозерами. Бульдозеры имеются в неограниченном количестве, а трудовых ресурсов есть только 35 единиц. Если нанять единицу труда, то можно раздавить тонну незаконного пармезана или тонну незаконных персиков. Однако с ростом количества нанятого труда приобретаются знания и накапливается опыт (ранее уничтожением еды никто не занимался), и все единицы труда сверх 10-й, занятые в раздавливании пармезана, могут раскатать уже не 1, а целых 2 тонны сыра. То же самое и с персиками: первые 10 единиц труда будут раскатывать по 1 тонне персиков, а все следующие — по 2 тонны.

В регионе  $E$  незаконно ввезенную еду сжигают на кострах. Так же, как и в регионе  $W$ , костров хватит на любое количество продуктов, а труд в этом регионе ограничен 15 единицами. Если нанять единицу труда, то можно сжечь 2 тонны пармезана или 2 тонны персиков. Повышения квалификации во регионе  $E$  не происходит, поскольку роль труда в процессе сжигания невелика.

Продукты можно перевозить между регионами без затрат ресурсов, а ни миграции рабочей силы, ни перемещения технологий не происходит.

Назовем кривой утилизационных возможностей (КУВ) множество точек в координатах (сыр; персики), ограничивающих доступные наборы из уничтоженных продуктов. Постройте суммарную КУВ страны.

**Задача 10.**

В некоторой маленькой стране есть месторождения золота ( $Au$ ), серебра ( $Ag$ ) и меди ( $Cu$ ), однако распределены они по территории страны неравномерно. В стране есть три области; в первой области есть только месторождения золота и серебра, во второй — только месторождения серебра и меди, в третьей — только месторождения золота и меди. Кривые производственных возможностей областей описываются уравнениями:

$$\text{Первая область: } 2Au_1 + Ag_1 = 140;$$

$$\text{Вторая область: } 2Ag_2 + Cu_2 = 140;$$

$$\text{Третья область: } 2Au_3 + Cu_3 = 140;$$

(За  $Au_i, Ag_i, Cu_i$  обозначены объемы добычи металлов в области номер  $i$ .)

С приближением XVII Всемирной Олимпиады растет спрос на все три металла (золото и серебро нужны непосредственно, а медь является составной частью бронзы).

1. Допустим, согласно подписанным ранее международным договоренностям, страна должна поставить оргкомитету Олимпиады 80 единиц золота и 80 единиц меди. Какое максимальное количество серебра может быть произведено в стране в этих условиях?
2. Допустим, оргкомитету нужно поставить все три металла в естественной пропорции 1:1:1. Какие максимальные количества металлов сможет поставить страна при соблюдении этой пропорции?

**Задача 11.**

Страна производит товары  $x$  и  $y$  используя труд и капитал. Производственные функции товаров выглядят следующим образом:  $y = \min(K_y; L_y)$  и  $x = \max(K_x; L_x)$ . Стоимость капитала:  $r = 2$ , стоимость труда:  $w = 1$ . Всего у старны есть бюджет:  $I = 60$ .

1. Постройте КПВ страны
2. Пусть  $P_x = P_y$ . Постройте КТВ этой страны.

## Задачи для самостоятельного решения

### Задача 12.

Сложите следующие КПВ, постройте их графики и задайте уравнение каждого участка.

- |   |  |
|---|--|
| а) $y = 10 - 2x, y = 5 - 2x$              | д) $y = 10 - 2x, y = 5 - 0.5x, \max(x, y) \leq 10$ |
| б) $y = 10 - 2x, y = 5 - 0.5x$            | е) $y = 100 - x^2, y = 30 - 10x$                   |
| в) $y = 10 - 2x, y = 7 - x, y = 5 - 0.5x$ | ж) $x^2 + y^2 = 225; y = 12 - 0.75x^2$             |
| г) $\max(x, y) \leq 10, y = 10 - x$       | з) $x^2 + y^2 = 225; x^2 + y^2 = 100$              |

### Задача 13.

В провинции А максимально можно произвести 15 единиц товара  $x$  с постоянной альтернативной стоимостью, равной  $\frac{1}{3}$  единицы товара  $y$ . В провинции Б максимально можно изготовить 14 штук товара  $y$  также с постоянной альтернативной стоимостью, но теперь уже равной  $\frac{1}{2}$  единицы товара  $x$ . Постройте суммарную КПВ.

### Задача 14.

Фермер имеет три поля, каждое из которых он использует под картофель и пшеницу. На первом поле фермер может вырастить либо 16 т картофеля, либо 4 т пшеницы, на втором - 8 и 3 соответственно, а на третьем - 4 и 2. Необходимо построить суммарную кривую производственных возможностей.

### Задача 15.

В течение недели работник может трудиться не более 40 часов. Он может производить или деталь А, на изготовление которой ему потребуется 4 часа, или деталь В, на изготовление которой уходит 2 часа. Эти детали производятся из одного и того же сырья. Для детали А требуется 5 единиц сырья, для детали В - 15 единиц. В течение недели может быть использовано не более 100 единиц сырья. Рыночная цена детали А составляет 10 р. Рыночная цена детали В составляет 25 р. Определите объем выпуска деталей А и В, что бы объем заработанных денежных средств после продажи деталей был максимальным, и укажите размер этого дохода.