Издержки и математика

Л.Зорин, А. Бекбулатов

Математика

Задача 1.

Некто 5 раз в месяц делает покупки в магазине «Седьмой континент». В среднем стоимость одного похода в магазин составляет X рублей. Магазин предлагает своим постоянным покупателям приобрести 10%-ную дисконтную карточку за 300 рублей (при наличии карточки каждая покупка обходится на 10% дешевле). Срок действия карточки – 1 месяц. Считая уровень цен и среднюю стоимость покупки для Некто неизменной, при каком минимальном значении X он не откажется приобрести дисконтную карточку, если банк не принимает вклады на срок меньше месяца? Зачем в условии задачи дана информация о банке

Задача 2.

Найти производную функции $f(x)$:

1. $f(x) = -x^2 + 12x - 20;$
2. $f(x) = \sqrt{1 + x^2 - 2x}.$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}$
4. $y = 4x^6 - 2x^3 + 3\sqrt{x} - 5$
5. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$
6. $y = \frac{ax-b}{x+b}$

Обязательные задачи

Задача 3.

Найти максимум и минимум функций:

а) $y(x) = x^2$

б) $y(x) = -x^2 + 12x - 20$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 12$

в) $f(x) = 2x^2 + 2x + 10$ на отрезке $2 \leqslant x \leqslant 10$

г) $y(x) = \frac{17}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 - 4x$

д) $y(x) = 10x^2 + 20x - 1, x \in Z$

е) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4, x \in [0; 4]$

ж) $f(x, y) = -x^2 + 4x + 2yx + 8y - 2y^2$

з) $f(x, y) = -x^2 + 10x + 1 + 12y - 3y^2 - 7$

Задача 4.

1. Найдите касательную к графику $y = 16 - x^2$ в точке $(2, 10)$
2. Найдите касательную к графику $y = x^2$, проходящую через точку $(1, 3)$

Сложные задачи

Задача 5.

В олимпиадных задачах часто предполагается, что определенные величины, которые по своей природе могут принимать только целые значения, могут выражаться не только целыми числами. Это делается для упрощения решения. В практических задачах, однако, игнорировать целочисленность зачастую нельзя, так как решение в целых числах может существенно отличаться от решения в действительных числах. Рассмотрим это на следующем примере. Товар X может выпускаться на станках двух типов. Один станок типа А может произвести максимум 100 ед. товара в день, и его аренда стоит 100 денежных единиц в день. Один станок типа В может произвести максимум 80 ед. в товара в день, и его аренда стоит 90 денежных единиц в день. Выпуск фирмы – не обязательно целое число.

а) Допустим, количество станков не обязательно целое. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести Q ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны? Ответьте на вопрос для каждого $Q > 0$.

б) Теперь допустим, что количество станков может быть только целым. Сколько станков каждого типа следует арендовать фирме, чтобы произвести Q ед. продукции в день и расходы на аренду были минимальны при $Q = 170$? $Q = 240$?

в) Верно ли, что если в пункте а) оптимальным решением для фирмы является аренда a станков типа А, и a нецелое, то при учете целочисленности обоих типов станков оптимальным решением будет аренда а станков типа А, где a — одно из двух целых чисел, ближайших к a?

Задача 6.

Фирма «Пикник» производит сухарики, спрос на которые описывается функцией $Q_c = 500 - 2P_c$, где Q – количество упаковок сухариков в тыс., а P – цена в у.е. Руководству фирмы поступило предложение начать производство апельсинового сока, спрос на апельсиновый сок описывается функцией $Q_a = 1200 - 5P_a$, где Q - количество пакетов сока в тыс., а P – цена в рублях. Тогда издержки производства товаров описываются функцией: $TC = 2Q_a^2 + 100Q_a + 2Q_c^2 + 150Q_c + 100$. Какую максимальную прибыль может получить фирма, если прибыль это TR - выручка; TC - издержки.

Задача 7.

Население одной бедной страны питается одним только картофельно-луковым супом. Картофель и лук люди могут купить только в одной из двух торговых систем, которые продают указанные продукты в виде следующих суповых наборов:

1. набор из 1 картофелины и 2 луковиц (цена набора 20 денежных единиц)
2. набор из 4 картофелин и 1 луковицы (цена набора 30 денежных единиц)

Функция полезности каждого жителя имеет вид: $U = XY$, где X – число картофелин, Y – число луковиц. Месячный доход каждого жителя составляет 800 денежных единиц. Весь он расходуется на приобретение картофеля и лука. Сколько картофелин и луковиц ежемесячно съедает каждый житель, максимизируя свою функцию полезности?

Задача 8.

Однажды Робинзон Крузо, не подумав о последствиях, рассказал Пятнице о том, как функционирует капиталистическая экономика. После этого Пятница заявил, что отныне будет работать только за деньги, желательно американские доллары. Если верить Пятнице, его функция полезности имеет вид: $U = X \times Y^w$, где X – число часов в сутки, свободных от работы, Y – число часов работы в сутки, w – почасовая заработная плата. При этом величины X и Y Пятница выбирает сам, а величина w является экзогенной, поскольку задается рынком труда (в данном случае – Робинзоном) и от Пятницы не зависит. Робинзон решил использовать Пятницу в качестве наемного работника на заготовке тропических бабочек для последующей продажи энтомологам и коллекционерам по $3 за штуку. Пятница в среднем ловит одну бабочку в час. Предположим, Робинзон максимизирует дневную прибыль. Какую почасовую оплату (w) он установит для Пятницы? Сколько часов в день (Y) Пятница будет работать?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.

Вывод линейных функций:

а) Постройте функцию $y = 5x + 10$;

б) Постройте семейство функций $y = kx + 4$, где k может принимать любое рациональное число;

в) Постройте семейство функций $y = 2x + b$, где b может принимать любое рациональное число;

г) Запишите уравнение прямой, проходящей через точку (5;2) параллельно прямой $y = 2x$

д) Известно, что линейная функция проходит через точки (10;0) и (0;20). Выведите уравнение функции;

е) Известно, что линейная функция проходит через точки $(2; 4)$ и $(-8; 14)$. Выведите уравнение функции;

ж) При каких x функция $y = -10 + 5x$ принимает положительные значения.

Задача 10.

Построить графики следующих функций:

а) $y = x^3$

б) $y = (x - 12)^2 + 3$

в) $y^2 + xy - 5 = 0$

г) $x^2 + xy - x + 5y - 10 = 0$

Задача 11.

Найти уравнение касательной к графику в точке x_0:

а) $x^2 - 2x + 5$, $x_0 = 1$

б) $\sqrt{x + \sqrt{2}}$, $x_0 = -\sqrt{2} + 1$

в) $x \ln x$, $x_0 = \frac{1}{e}$

г) $\frac{1}{x^3} + 2x$, $x_0 = -1$

Издержки

Полезная информация

Основные обозначения, которые могут встретиться в задачах здесь и далее:

- $TP(K, L) = Q(K, L)$ – зависимость количества производимой продукции от используемых факторов производства (капитала и труда).
- $MP(L) = TP'(L)$ – предельный продукт труда, производная функции выпуска по L.
- $MP(K) = TP'(K)$ – предельный продукт капитала, производная функции выпуска по K.
- $TC(K, L) = rK + wL$ – зависимость общих издержек от используемого количества факторов производства (капитала и труда; r - рента капитала, w - заработная плата).
- $TC(Q)$ – зависимость общих издержек от произведенного количества продукции (минимальная сумма, затратив которую можно произвести Q единиц продукции).
- $FC = TC(0)$ – постоянные издержки (издержки при нулевом выпуске продукции).
- $VC(Q) = TC(Q) - FC$ – переменные издержки.
- $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$ – средние издержки (себестоимость производства).
- $AVC(Q) = \frac{VC(Q)}{Q}$ – средние переменные издержки.
- $AFC(Q) = \frac{FC}{Q}$ – средние постоянные издержки.
- $MC(Q) = TC'(Q) = VC'(Q)$ – предельные издержки (непрерывный случай).
- В краткосрочном периоде (SR) фирма может изменить количество лишь одного из факторов производства (обычно, труда).
- В долгосрочном периоде (LR) фирма может изменить количество всех факторов производства.

Обязательные задачи

Задача 12.

Фирма производит товар, используя труд (L) и капитал (K). Единица труда стоит $P_L = 10$, единица капитала стоит $P_K = 1$. Найдите функцию издержек $TC(Q)$, если производственная функция имеет вид:

а) $Q(L, K) = L + K$

б) $Q(L, K) = \sqrt{LK}$

в) $Q = K^2 + L^2$

г) $Q(L, K) = \min\{L, 4K\}$

Задача 13.

В уездном городе $\mathcal{N}$ два помещика Бобчинский и Добчинский решили организовать ресторанчик. Помещики прикинули издержки и пришли к следующему выводу:

- Ресторанчик нужно открывать не далее 10 километров от центра города, иначе клиентов не найти.

- Чем ближе к центру, тем большую мзду нужно отдать губернатору – если поставить ресторанчик на расстоянии в t километров от города, нужно отдать $(100 - t^2)$ золотых губернатору.

- Чем дальше от города, тем дороже выйдут ингридиенты (их же нужно доставить из города). Так, есил поставить ресторанчик на расстоянии в t километров от города, ингридиенты для *каждой* порции обойдутся в t золотых.

- Остальные издержки помещики оценили и пришли к выводу, что они описываются функцией $TC = Q^2$, где Q – количество поданных порций.

Помогите помещикам понять, на каком расстоянии ставить ресторанчик и какие итоговые издержки они будут нести в зависимости от количества поданных порций.

Задача 14.

Однажды ученые-антропологи встретили в лесу питекантропа, который умел делать простые орудия труда – палки-копалки. Для изготовления одной палки-копалки ему требовался целый рабочий день. Будем считать, что палка-копалка выходила из строя в пределах того же месяца, в течение которого и была изготовлена. Производственная функция питекантропа имела вид: $Q = (K + 3)L^2$ где Q – число выкопанных в течение месяца корнеплодов, – число изготовленных и использованных в течение месяца палок-копалок, L – число рабочих дней в течение месяца, которое питекантроп мог посвятить поиску и выкапыванию корнеплодов. Питекантроп не имел выходных и работал 30 дней в месяц, распределяя эти дни между изготовлением палок-копалок и выкапыванием корнеплодов таким образом, чтобы максимизировать общее количество корнеплодов. Антропологи пожалели питекантропа и решили подарить ему некоторое количество палок-копалок, произведенных фабричным способом. Сколько, как минимум, готовых палок-копалок должны подарить питекантропу антропологи в расчете на месяц для того, чтобы он в течение месяца занимался только поиском и выкапыванием корнеплодов?

Задача 15.

Фирма, организующая занятия экономикой в городе Ботанск, использует в своём производстве только труд преподавателей, которых она нанимает на совершенно конкурентном рынке труда. Наняв $L \leq 4$ человеко-часов, фирма может научить $Q = L^2$ учеников, далее при найме каждой следующей единицы труда общий продукт растёт на 2 единицы, и так продолжается до 8 единиц труда включительно. При $\mathrm{L} > 8$ преподаватели мешают друг другу, обсуждая сплетни в учительской, поэтому каждая дополнительно нанятая единица труда уменьшает общий продукт на 1 единицу. Цена готового продукта равна 2.

a) Составьте производственную функцию фирмы, то есть ответьте на вопрос, чему равен общий продукт фирмы Q в зависимости от L (для всех $L \geq 0$; учтите, что L может измеряться не только целыми числами, если преподаватели работают нецелое число часов).

b) Как прибыль фирмы зависит от L при уровнях заработной платы $\mathrm{w} = 2$ и $\mathrm{w} = 5$? Составьте функции и схематично изобразите их графики.

c) Сколько преподавателей будет нанято при заработной плате 2? При заработной плате 5?

Сложные задачи

Задача 16.

Процесс производства товара «Штучки» включает в себя три этапа.

i. На первом этапе, используя труд и капитал, производят Штуковины, причем технология на данном этапе описывается производственной функцией $q = \sqrt{KL}$, где q — количество Штуковин, K — объем капитала, L — объем труда.

ii. На втором этапе производят Штуки, причем для получения одной Штуки необходимы 3 единицы труда и 2 Штуковины.

iii. . И наконец, на третьем этапе из одной Штуки получают 4 Штучки, затрачивая на одну такую операцию 5 д. е. Фирма, производящая «Штучки», арендует в краткосрочном периоде 1 единицу капитала. Плата за аренду этой единицы составляет 16 д. е. Цена единицы труда составляет 1 д. е. Все рассматриваемые количества могут быть не только целыми. Выведите функцию общих издержек производства «Штучек», то есть зависимость $TC(Q)$, показывающую, какое минимальное количество денежных единиц нужно потратить фирме на производство Q Штучек.

Задача 17.

Граф Бартоломео имеет в личной собственности глубоководный пруд, в котором ежегодно производится сезонный лов рыбы. Для лова рыбы он нанимает рыбаков и приобретает сети. Сеть служит только в течение одного сезона. Один рыбак, используя одну сеть, может выловить в течение сезона 87 рыб. Если одну сеть держат два рыбака, то их общий улов составит: $87+86$ рыб. Если одну сеть держат три рыбака, то их общий улов будет равен: $87+86+85$ рыб. И так далее. Другими словами, предельный продукт тру- да каждого последующего рыбака (из числа занятых на одной и той же сети) на единицу меньше, чем предельный продукт предыдущего.

Если граф Бартоломео приобретает несколько сетей для одного сезона лова рыбы, то на каждую сеть приходится одинаковое число рыбаков. Чтобы нанять одного рыбака на весь сезон лова рыбы, надо заплатить ему 1 лиру. Одна сеть стоит 5 лир. Сумма денег, которую граф может потратить на ловлю рыбы, равна 300 лирам.

а) Для выбранной графом технологии лова рыбы сформулируйте производственную функцию в виде: $Q = f(K, L)$, где Q – общее число выловленных рыб, – общее число сетей (объем капитала), L – общее число рыбаков на всех сетях, вместе взятых.

б) Какую отдачу от масштаба имеет найденная Вами производственная функция?

в) Сколько всего рыбаков наймет граф и сколько купит сетей?

г) Каким будет максимально возможный улов рыбы?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 18.

Фирма производит товар, используя труд (L) и капитал (K). Единица труда стоит $P_L = 10$, единица капитала стоит $P_K = 1$. Найдите функцию издержек $TC(Q)$, если производственная функция имеет вид:

а) $Q(L, K) = \sqrt{L+K}$

б) $Q = 2\sqrt{L} + \sqrt{K}$

в) $Q(L, K, T) = 10L + K + 5T$, где - третий фактор производства, земля. $P_T = 5$

Задача 19.

Производственная функция в краткосрочном периоде имеет вид: $Q_L = 2\sqrt{L}$. Каково значение предельного продукта труда при использовании 16 единиц труда? Какова производительность труда при найме 16 единиц труда?

Пусть заработная плата $w = 2$. Выразите общие издержки фирмы в зависимости от Q, если все ее издержки связаны только с наймом труда.

Задача 20.

Для производства одной единицы товара "Ж"требуется 3 единицы ресурса "Апельсин"и 2 единицы ресурса "Баклажан". Единица ресурса "Апельсин"стоит 20 тугриков, а единица "Баклажана"– 30 тугриков. Выведите функции средних переменных и предельных издержек товара "Ж".

Задача 21.

В результате изменений на производстве фирма добилась увеличения выпуска с $Q_1 = 5$ до $Q_2 = 10$. Средние переменные издержки фирмы не изменились. Средние постоянные издержки в результате этого же события уменьшились в 2 раза до 12. Найти общие издержки после увеличения выпуска, если до увеличения выпуска они были равны 250.

Задача 22.

а) $TC = Q^2 + 2Q + 10$, найдите функции AC, AVC, AFC, MC.

б) $AFC = \dfrac{20}{Q}$; $AVC = 10$, найдите функцию TC.

в) $AC = 13$, найдите фунции TC, AVC, AFC, MC.

г) $MC = 5$, $FC = 25$, найдите функции TC, AC, VC, AVC, AFC.