6 класс

(Время выполнения заданий – 3 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

6.1. В классе 30 учеников. На контрольной по математике некоторые ученики класса получили 5, некоторые – 4, некоторые – 3, некоторые – 2. Сумма полученных оценок оказалась равной 130. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие 5, получили бы 2, получившие 4 – получили бы 3, получившие 3 – получили бы 4, а получившие 2 – получили бы 5?

6.2. В ралли участвовало 6 машин. Они стартовали одновременно. В каждый момент обгона одной машины другой делалась фотография этих двух машин («тройных» обгонов не было, момент старта обгоном не считается). Могло ли оказаться, что первая машина оказалась ровно на 4 фотографиях, вторая – ровно на 5, третья – ровно на 6, четвертая – ровно на 7, пятая – ровно на 8 и шестая – ровно на 9 фотографиях?

6.3. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $A \to B \to C \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $A \to D \to C \to B$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта A в разных направлениях и поедут по сторонам прямоугольника $ABCD$? (Скорости обеих машин постоянны).

6.4. Когда из семизначного числа A вычли сумму всех, кроме одной, его цифр, получили число 1234515. А какое число получится, если из A вычесть сумму всех его цифр, кроме первой?

6.5. Из 7 внешне одинаковых монет 2 фальшивые монеты – легче настоящих и весят одинаково. Настоящие монеты также весят одинаково. Можно ли найти обе фальшивые монеты за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь?

7 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

7.1. Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2?

7.2. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны и диагонали AC и BD – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $B \to C \to A \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $D \to B \to C \to A$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта C: первая по маршруту $C \to B \to D$, вторая – по маршруту $C \to A \to D \to B$, а встреча произойдет на дороге BD? (Скорости обеих машин постоянны).

7.3. Можно ли так расставить по кругу 100 чисел 1 и 101 число –1 так, чтобы произведение любых трех подряд идущих чисел было положительным?

7.4. Найдите все решения ребуса КОРОВА + КОРОВА = МОЛОКО. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.

7.5. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он – лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 101 человек?

XLVI Всероссийская олимпиада школьников по математике.
Муниципальный этап. Московская область.

8 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

8.1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

8.2. Пятеро друзей сыграли друг с другом по несколько партий (не обязательно одинаковое количество) в настольный теннис (ничьих не бывает). После игр первый заметил, что у него побед на 4 больше, чем поражений; второй и третий заметили, что у каждого из них поражений на 5 больше, чем побед. Четвертый заметил, что у него побед столько же, сколько поражений, а пятый, что он с каждым из остальных сыграл поровну партий. Мог ли пятый выиграть во всех партиях?

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AC взята точка P так, что LA – биссектриса угла BLP. Докажите, что если $BL = CP$, то угол ABC в два раза больше угла BCA.

8.4. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом двоих игроков дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ними, аннулировали, и этих двух игроков исключили из таблицы. Оказалось, что в результате Петя стал победителем турнира (набрал больше очков, чем любой другой участник). Сколько очков в итоге (после дисквалификации игроков) мог набрать Петя? За победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

8.5. Даны положительные числа a, b, c, d. Известно, что любые два из них отличаются не более чем в 3 раза. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2<2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

XLVI Всероссийская олимпиада школьников по математике.
Муниципальный этап. Московская область.

9 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа..

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

9.1. Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac \neq 0$).

9.2. Пусть x, y, z – ненулевые числа. Докажите, что среди неравенств: $x+y>0$, $y+z>0$, $z+x>0$, $x+2y<0$, $y+2z<0$, $z+2x<0$ по крайней мере два – неверные.

9.3. По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

9.4. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, проведена биссектриса AL. На стороне AB выбрана точка K так, что $AK=AC$. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ALB. Докажите, что углы KCB и ABO равны.

9.5. Шахматная фигура «кентавр» ходит попеременно как конь и как белая пешка (т.е. строго на одну клетку вверх). Может ли она, начав с некоторой клетки шахматной доски 8×8, обойти все клетки, побывав на каждой клетке ровно по разу, если первый ход она делает как пешка? Стартовая клетка считается обойденной.

10 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

10.1. Графики функций $f(x)=ax^2+bx$, $g(x)=cx^2+dx$, $f_1(x)=ax+b$, $g_1(x)=cx+d$, пересекаются в одной точке с отрицательной абсциссой. Докажите, что если $ac\neq 0$, то $bc=ad$.

10.2. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом одного игрока дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ним, аннулировали, и этого игрока исключили из таблицы. Мог ли в результате Петя стать победителем турнира (набрать больше очков, чем любой другой участник)?

10.3. Каждый из 13 ребят задумал целое число. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждый изменил свое число: либо разделил его на 3, либо умножил его на 5. Могла ли сумма полученных 13 чисел равняться 175?

10.4. Числа x, y, z таковы, что $2x>y^2+z^2$, $2y>x^2+z^2$, $2z>y^2+x^2$. Докажите, что $xyz<1$.

10.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке S. Окружность ω, проходящая через точки A, O, C, пересекает отрезок CD в точке M $(M\neq C)$. Докажите, что M – середина отрезка DS.

11 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

11.1. Даны два пятизначных числа без цифр 0 и 1 в своей записи. Модуль их разности – четырехзначное число S. Известно, что если у одного из исходных чисел каждую цифру уменьшить на 1, то модуль разности станет равным 10002. Какие значения может принимать число S?

11.2 Разность возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, является натуральным числом, оканчивающимся на 2019. Могут ли три последовательных члена этой прогрессии быть квадратами натуральных чисел?

11.3. На деревянной стене отметили вершины треугольника ACE. Перпендикулярно стене вбили гвозди так, что наружу торчат части гвоздей длин: AB=1, CD=2, EF=4 (B, D, F – шляпки гвоздей). Могли ли расстояния между шляпками гвоздей оказаться равными $BD=\sqrt{2}$, $DF=\sqrt{5}$, $FB=\sqrt{13}$?

11.4. Известно, что $x+0,5>y^2+z^2$. Докажите, что $x+y+z>-1$.

11.5. В каждой из 320 коробок лежит либо 6, либо 11, либо 15 шариков, причем все три типа коробок присутствуют. Верно ли, что можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 1001 шарик?