

I тур.

Задача 1.1. (5 баллов)

Девятиклассники пришли на олимпиаду по математике. В аудитории их всех рассадили за парты по двое, и свободных мест не осталось. Оказалось, что, у 80% мальчиков соседом по парте был тоже мальчик, а у 40% девочек соседкой по парте была тоже девочка. Какую часть девятиклассников на этой олимпиаде составляли мальчики?

Ответ: $\frac{3}{4}$

Решение.

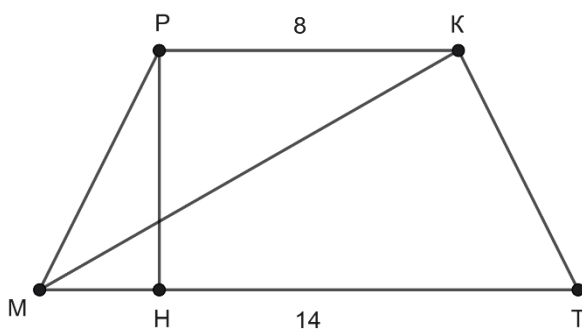
По условию у 80% мальчиков сосед по парте был мальчик, значит, у 20% мальчиков соседкой по парте была девочка. Аналогично, у 40% девочек соседкой по парте была тоже девочка, значит, у 60% девочек соседом по парте был мальчик. Следовательно, 20% от общего числа мальчиков равно 60% от общего количества девочек, откуда получаем, что мальчиков девятиклассников было в 3 раза больше, чем девочек. Следовательно, мальчики составляли три четверти.

Задача 1.2. (5 баллов)

В равнобокой трапеции $MPKT$ основания PK и MT равны соответственно 8 и 14, а высота равна 4. Сравните углы PMK и KMT .

Ответ: угол PMK больше угла KMT

Решение:



Так как $PK \parallel MT$, то $\angle PKM = \angle KMT$. Пусть PH – высота трапеции. Тогда $MH = \frac{MT - PK}{2} = 3$; $PH = 4$, следовательно, из прямоугольного треугольника MPH : $MP = 5$.

Таким образом, в треугольнике PMK $PK > MP$, значит, $\angle PMK > \angle PKM$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол). Следовательно, $\angle PMK > \angle KMT$.

Задача 1.3. (5 баллов)

Петя и Вася загадали втайне друг от друга по четырёхзначному натуральному числу, запись которого состоит **только** из цифр 1, 2, 3 (возможно, некоторые из цифр в загаданных ребятами числах не использовались; возможно, что они загадали одно и то же число). Затем они сложили загаданные числа. Сколько существует различных вариантов полученной суммы?

Ответ: 625

Решение: В каждом разряде суммы чисел Пети и Васи могла быть любая из цифр: 2, 3, 4, 5, 6. Это означает, что итоговое количество вариантов полученной суммы равняется $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$.

II тур.

Задача 2.1. (6 баллов)

Петя и Вася загадали два различных числа. Оказалось, что оба эти числа имеют вид $k^2 - 10k$, где k – натуральное число. Могла ли разность этих чисел быть равна 2026? Если да, приведите пример таких чисел, если нет – объясните, почему.

Ответ: нет

Решение. Рассмотрим эти числа, пусть это $a^2 - 10a$ и $b^2 - 10b$. Тогда их разность можно разложить на множители следующим образом:

$$a^2 - 10a - (b^2 - 10b) = a^2 - b^2 - 10(a - b) = (a - b)(a + b - 10)$$

Разность и сумма двух натуральных чисел имеют одну чётность. Значит, $(a - b)$ и $(a + b - 10)$ одинаковой чётности.

Если оба эти множителя чётны, то их произведение делится на 4; а 2026 на 4 не делится.

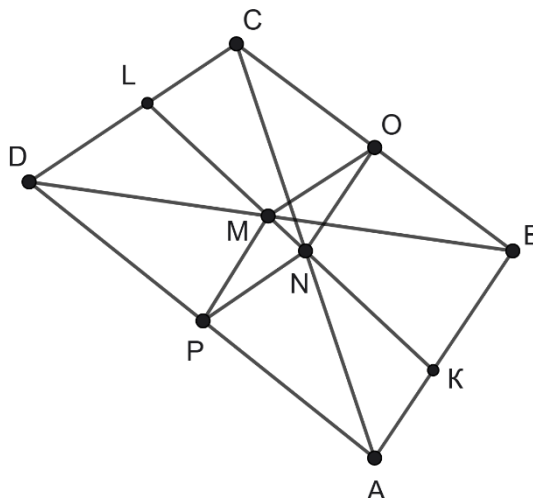
Если оба эти множителя нечётны, то их произведение – нечётно, а 2026 – чётно.

Противоречие. Значит, разность таких чисел не могла быть равна 2026.

Задача 2.2. (6 баллов)

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ на серединах диагоналей отметили точки M и N . Прямая MN пересекает сторону AB в точке K , а сторону CD в точке L . Найдите угол CLK , если угол BKL равен 70° , а $AB = CD$.

Ответ: 70°



Решение: Отметим точки O и P – середины сторон BC и AD . Отрезки ON и MP параллельны и равны как средние линии треугольников ABC и DAB . Аналогично, параллельны и равны отрезки OM и NP .

Из равенства отрезков AB и CD следует, что $ON = NP = MP = OM$, то есть четырёхугольник $ONPM$ – ромб.

Углы BKL и ONL , CLK и OMK равны, как соответственные углы при параллельных прямых AB и ON , CD и OM и секущей LK . Поскольку $ON = OM$, то углы ONL и OMK равны по 70° .

Задача 2.3. (6 баллов)

Петя и Вася загадали втайне друг от друга по четырёхзначному натуральному числу, запись которого состоит **только** из цифр 1, 2, 3 (возможно, некоторые из цифр в загаданных ребятами числах не использовались; возможно, что они загадали одно и то же число). Затем они сложили загаданные числа.

- Могла ли полученная сумма быть кратна 99?
- Если ответ в пункте а) – да, то сколько различных значений суммы, кратных 99, могло получиться? Если ответ в пункте а) – нет, то докажите это.

Ответ: а) Да б) 16

Решение: а) Если Петя загадает число 2222, а Вася – число 2332, то сумма будет равна 4554. $4554:99=46$.

б) Кратность 99-ти гарантируется, если число кратно и 9, и 11.

- Для кратности 9 необходимо и достаточно, чтобы сумма всех цифр была кратна 9.

- Для кратности 11 необходимо и достаточно, чтобы знакопеременная сумма цифр числа была кратна 11.

В каждом разряде суммы чисел Пети и Васи могла быть любая из цифр 2, 3, 4, 5, 6.

Минимальная сумма всех цифр полученной суммы равна 8, максимальная – 24.

- Минимальная сумма первой и третьей цифры суммы равна 4, максимальная – 12.
- Минимальная сумма второй и четвёртой цифры суммы равна 4, максимальная – 12.
- Знакопеременная сумма цифр полученной суммы может изменяться от -8 до 8 (включительно).

Тогда для суммы вида $\overline{abcd}$ справедливо:

$$\begin{cases} a+b+c+d=9 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b+c+d=18 \\ a-b+c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=9 \\ a+c=4,5 - \text{невозможная сумма} \\ a+c=b+d=9 \end{cases}$$

$a+c=9$ можно получить 4-мя способами, $b+d=9$ тоже можно получить 4-мя способами. Итого $4 \cdot 4=16$ способов.

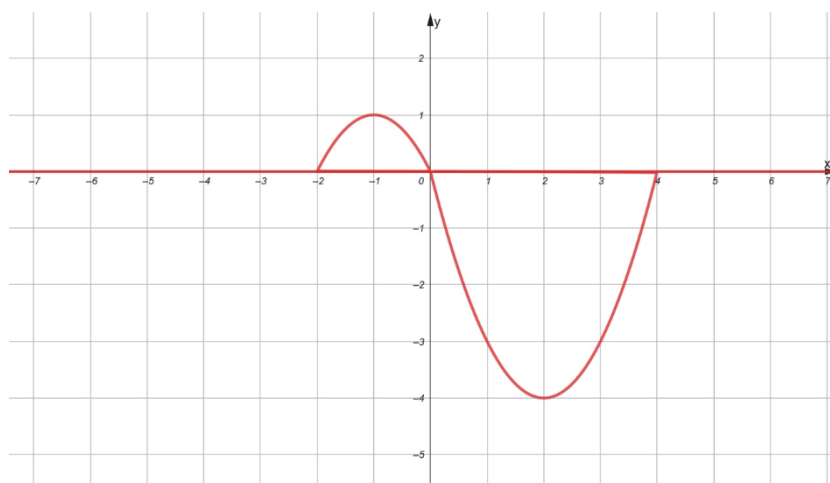
III тур.

Задача 3.1. (7 баллов)

На координатной плоскости изобразите геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y(y + 3x) = |y|(x - x^2)$. Система координат должна быть построена простым карандашом, а ГМТ выделено цветной ручкой.

Цена деления 1 ед. = 2 клетки

Ответ:



Решение. Уравнение $y(y + 3x) = |y|(x - x^2)$ равносильно совокупности трёх случаев:

$y = 0$ или $\begin{cases} y > 0 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$ или $\begin{cases} y < 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases}$. В первом случае это прямая, совпадающая с осью абсцисс, а во втором и третьем случаях – части соответствующих парабол, ограниченных осью абсцисс.

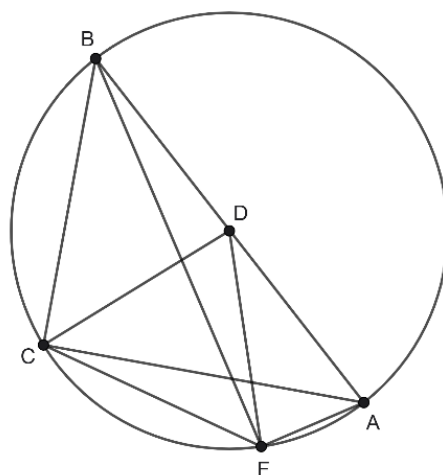
Задача 3.2. (7 баллов)

Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , $\angle BAC = 28^\circ$

Точка F симметрична точке B относительно прямой CD . Найдите угол AFC

Ответ: 118° .

Решение:



Из условия задачи следует, что точка D — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Кроме того, из симметрии $DF = DB$, поэтому точка F лежит на этой окружности). Тогда $\angle AFC = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ + \angle BAC = 118^\circ$.

Задача 3.3. (7 баллов).

Петя и Вася случайным образом загадали втайне друг от друга по четырёхзначному натуральному числу, запись которого состоит **только** из цифр 1, 2, 3 (возможно, некоторые из цифр в загаданных ребятами числах не использовались; возможно, что они загадали одно и то же число). Затем они сложили загаданные числа, получив случайную величину X .

- Найдите $Mo(X)$ — моду величины X — наиболее вероятное значение случайной величины X .
- Найдите вероятность появления числа $x = Mo(X)$.

ОТВЕТ: а) 4444 б) $\frac{1}{81}$

РЕШЕНИЕ:

В каждом разряде суммы чисел Пети и Васи могла быть любая из цифр 2, 3, 4, 5, 6. Чтобы в некотором разряде появилась цифра 2, нужно, чтобы оба ребёнка загадали по 1 в этом же разряде. Вероятность такого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

- Чтобы в некотором разряде появилась цифра 6, нужно, чтобы оба ребёнка загадали по 3 в этом же разряде. Вероятность такого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
- Чтобы в некотором разряде появилась цифра 3, нужно, чтобы кто-то из детей загадал 1, а кто-то 2 в этом же разряде. Вероятность такого исхода $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
- Чтобы в некотором разряде появилась цифра 5, нужно, чтобы кто-то из детей загадал 3, а кто-то 2 в этом же разряде. Вероятность такого исхода $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
- Вероятность появления 4-ки в некотором разряде равна $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.

Тогда в каждом разряде появление 4-ки – наиболее вероятный исход. Так как появления цифр в каждом разряде суммы Пети и Васи – независимые испытания, то модальное значение суммы равно 4444, а её вероятность его появления равна $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

IV тур.

Задача 4.1. (5 баллов)

При каких значениях переменных x и y выражение

$$2x^2 + 10y^2 - 6xy - 12x - 4y + 1750$$

принимает наименьшее возможное значение? Чему равно это значение?

Ответ: 1710 при $x = 6$ и $y = 2$.

Решение. $2x^2 + 10y^2 - 6xy - 12x - 4y + 1750 =$

$$= (x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (x - 3y)^2 + 1710 \geq 1710$$

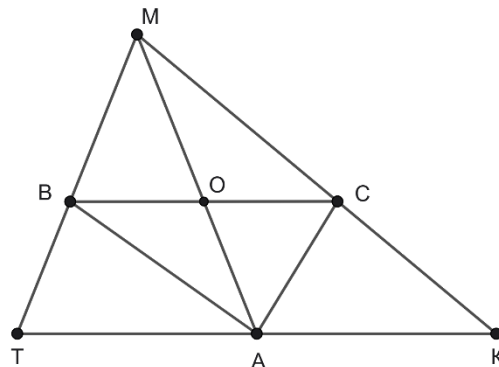
Равенство 1710 достигается тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} x - 6 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases},$$

т.е. при $x = 6$ и $y = 2$.

Задача 4.2. (5 баллов)

В треугольнике $ТМК$ точка A – середина $ТК$, AB и AC – биссектрисы треугольников ATM и AKM соответственно. Отрезки AM и BC пересекаются в точке O . Найдите AO , если $BC = 6$.

Ответ: 3



Решение: По свойству биссектрисы из треугольников ATM и AKM получим, что $\frac{TB}{BM} = \frac{TA}{AM}$ и $\frac{KC}{CM} = \frac{AK}{AM}$. По условию $AT = AK$, значит, $\frac{TB}{BM} = \frac{KC}{CM}$ следовательно, $BC \parallel TK$ (из подобия треугольников BMC и TMK). Тогда O – середина отрезка BC .

Так как AB и AC – биссектрисы смежных углов, то треугольник ABC – прямоугольный. Его медиана AO , проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы BC , то есть 3.

Задача 4.3. (5 баллов)

Петя и Вася загадали втайне друг от друга по четырёхзначному натуральному числу, запись которого состоит **только** из цифр 1, 2, 3 (возможно, некоторые из цифр в загаданных ребятами числах не использовались; возможно, что они загадали одно и то же число). Затем

- Петя сообщил Васе число, состоящее **только** из цифр 1, 2, 3, каждая цифра которого **не** совпадала с цифрой в соответствующем разряде загаданного Петей числа.
- Вася сообщил Пете число, состоящее **только** из цифр 1, 2, 3, каждая цифра которого **не** совпадала с цифрой в соответствующем разряде загаданного Васей числа.

Далее ребята сложили соответствующие числа, получив сумму X загаданных ими чисел и сумму Y названных друг другу чисел. Оказалось, что $Y = 5642$.

- а) Могло ли оказаться так, что $X > 6000$?
- б) Найдите наименьшее значение X .
- в) Найдите наибольшее значение X .

P.S. 5642 метра – высота горы Эльбрус – самая высокая точка Европы.

ОТВЕТ: а) НЕТ. б) 2224. в) 5466.

РЕШЕНИЕ: а) Y начинается с пятёрки. То есть кто-то из ребят гарантированно сообщил другому число, начинающееся с тройки. То есть он загадал число, не начинающееся с тройки. Тогда X не могло начинаться с 6.

Цифра в разряде тысяч числа Y – это $5=2+3=3+2$.

Цифра в разряде сотен числа Y – это $6=3+3$.

Цифра в разряде десятков числа Y – это $4=1+3=3+1=2+2$.

Цифра в разряде единиц числа Y – это $2=1+1$.

б) Тогда

Наименьшая цифра в разряде тысяч числа X – это $2=1+1$.

Наименьшая цифра в разряде сотен числа X – это $2=1+1$.

Наименьшая цифра в разряде десятков числа X – это $2=1+1$.

Наименьшая цифра в разряде единиц числа X – это $4=2+2$.

Пример достижимости: оба мальчика загадали число 1112, но Петя сообщил Васе число 3321, а Вася сообщил Пете число 2321.

в) Тогда

Наибольшая цифра в разряде тысяч числа X – это $5=3+2=2+3$.

Наибольшая цифра в разряде сотен числа X – это $4=2+2$.

Наибольшая цифра в разряде десятков числа X – это $6=3+3$.

Наибольшая цифра в разряде единиц числа X – это $6=3+3$.

Пример достижимости: Петя загадал число 2233, а сообщил Васе 3321; Вася загадал число 3233, а сообщил Пете 2321.