

I тур.

Задача 1.1. (6 баллов)

Аппарат «сумматор» умеет выполнять с дробями всего две операции: либо числитель увеличивать на 5, либо знаменатель увеличивать на 3. Какое наименьшее количество операций этот аппарат должен будет совершить, чтобы, взяв дробь $\frac{3}{5}$ и выполняя только такие операции последовательно в произвольном порядке, получить дробь, значение которой снова будет равно $\frac{3}{5}$?

Ответ:

Решение.

Пусть первая операция выполнена x раз, а вторая – y раз, и после этого из дроби $\frac{3}{5}$ получилась снова дробь, значение которой равно $\frac{3}{5}$. Это означает, что $\frac{3}{5} = \frac{3+5 \cdot x}{5+3 \cdot y}$, откуда $3 \cdot 5 + 3 \cdot 3y = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5x$. Следовательно, $9y = 25x$. Поскольку 9 и 25 взаимно просты, то $y = 25k$ и $x = 9k$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда наименьшее количество операций первого вида должно быть 25, а операций второго вида 9. Значит, общее количество операций будет минимальным при $25 + 9 = 34$ операциях.

Задача 1.2. (6 баллов)

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB биссектриса AP перпендикулярна медиане BM . Периметр треугольника PMC равен 27 см. Найдите периметр треугольника ABC .

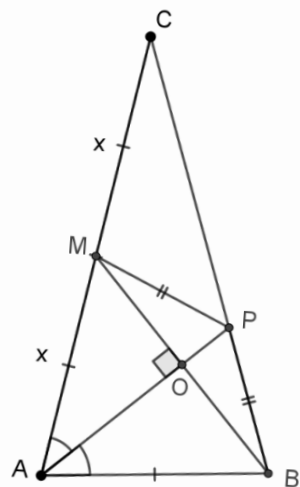
Ответ: 45.

Решение.

Обозначим точку пересечения медианы BM и биссектрисы AP за точку O .

По признаку равнобедренного треугольника, раз AO это биссектриса и высота треугольника AMB , то этот треугольник равнобедренный и OA – это медиана треугольника.

Раз OP – это медиана и высота треугольника MPB , то (по признаку равнобедренного треугольника) треугольник MPB – равнобедренный. Обозначим половину боковой стороны треугольника ABC за x . Тогда $MC = AM = AB = x$. Если треугольник MPB



равнобедренный, то $MP = PB$ и периметр треугольника PMC равен $MC + CP + MP = MC + CP + PB = x + 2x = 3x = 27$. Тогда $x = 9$. А, значит, периметр треугольника ABC равен $5x$, то есть, 45.

Задача 1.3. (6 баллов)

У Васи есть полка, на которой расположены 8 различных книг. Вася может выполнять следующую операцию: взять несколько последних книг в полке, переставить их в начало полки, не меняя порядка, а затем перевернуть саму полку, тем самым, поставив книги в обратном порядке. Сколько различных расположений книг на полке могло получиться после нескольких таких операций?

Ответ: 16

Решение.

Расставим числа, соответствующие номерам книг, по кругу. Указанная операция меняет порядок следования книг на полке на противоположный, а также меняет первую книгу в цикле. Первую книгу в цикле можно выбрать 8 способами, и есть два варианта следования книг, то есть $8 \times 2 = 16$ способов расставить книги на полке.

II тур.

Задача 2. (7 баллов)

Организаторы турнира математических игр в понедельник после окончания регистрации изучили списки участников и заметили, что доля девочек среди всех зарегистрированных детей составляет 50%. Но в течение недели некоторые дети заболели, и не смогли приехать на турнир в субботу. При этом кому-то из заболевших смогли найти замену, и вместо них на турнир приехали другие участники, а некоторым командам пришлось выступать в неполном составе. По окончании турнира в субботу выяснилось, что общее количество детей, приехавших на турнир, оказалось на 5% меньше, чем количество изначально зарегистрированных. При этом в списках фактической явки доля девочек составила уже 52%. Как при этом изменилось количество девочек (увеличилось или уменьшилось)? и на сколько процентов оно изменилось?

Ответ: количество девочек уменьшилось на 1,2%.

Решение.

Пусть сначала было x девочек, значит, количество мальчиков было тоже равно x , всего в списках было $2x$ детей. Поскольку в субботу на турнир приехало на 5% меньше детей,

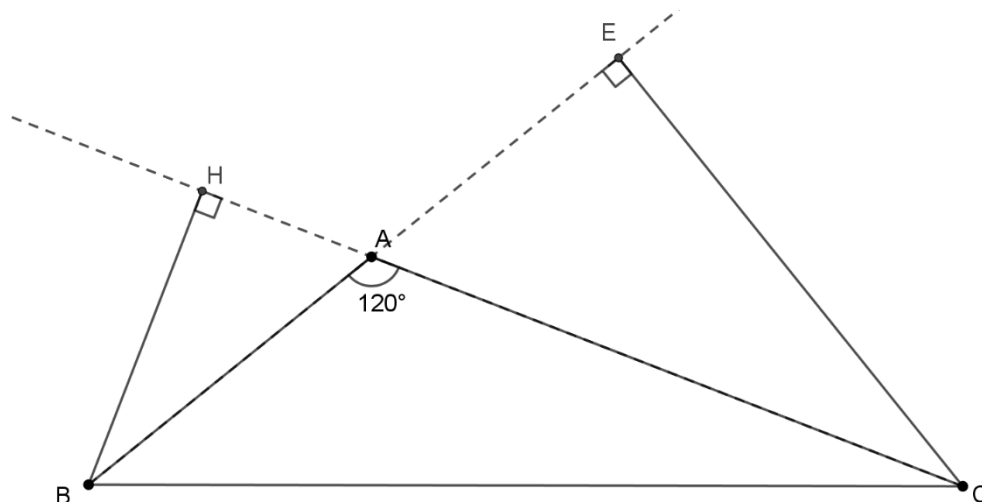
значит их общее количество на турнире составило $0,95 \cdot 2x = 1,9x$ человек. Среди них девочки составляли 52%, то есть количество приехавших девочек было равно $0,52 \cdot 1,9x = 0,988x$. Было x девочек, а стало $0,988x$. Значит, количество девочек уменьшилось на 1,2%.

Задача 2.2. (7 баллов)

В неравностороннем треугольнике ABC $\angle A = 120^\circ$. BH и CE – высоты треугольника ABC . Найдите, чему равно отношение: $\frac{AC+AB}{AH+AE}$.

Ответ: 2.

Решение.



Углы BAH и CAE смежные с углом BAC , равным 120° , значит, они равны по 60° . Таким образом, прямоугольные треугольники HAB и EAC имеют по углу в 30° , то есть, катеты HA и EA в два раза меньше гипотенуз AB и AC соответственно (по свойству прямоугольного треугольника). Откуда следует, что $\frac{AC+AB}{AH+AE} = 2$.

Задача 2.3. (7 баллов)

Отель представляет собой квадрат 4×4 , состоящий из комнат-клеток. В отель заселилось 16 человек, по одному в комнату. Каждый является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Среди гостей отеля есть как рыцари, так и лжецы. Гости отеля считаются соседями, если они живут в комнатах с общей стороной. Каждый житель сказал фразу «Среди моих соседей есть и рыцари, и лжецы». Какое максимальное число лжецов может жить в отеле?

Ответ: 6.

Решение.

Оценка. Заметим, что если в отеле есть два соседа-лжеца, то у каждого из них все соседи – лжецы, у них – тоже и, продолжая такое рассуждение, получим, что все гости – лжецы, что не подходит по условию. Значит, у каждого лжеца все соседи – рыцари. Разобьем все клетки на группы. Одна группа из 4 центральных клеток в виде квадрата 2×2 , и 4 группы из трёхклеточных уголков, примыкающих к углам (в каждый уголок входит угловая клетка и ее соседи). В уголке может жить не более одного лжеца, если живет двое, то либо они соседи, либо у углового гостя-рыцаря будут оба соседа-лжеца. В центральном квадрате 2×2 не более двух лжецов, иначе найдутся соседние. Итого всего не более 6 лжецов.

Пример. Поселим лжецов на одной диагонали из 4 клеток и в двух угловых клетках, не лежащих на этой диагонали. В остальных клетках – рыцари. У каждого рыцаря есть соседи рыцари и лжецы, у каждого лжеца – только рыцари.

Л	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р
Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Л

III тур.

Задача 3. (8 баллов)

Известно, что $a^2 - 11ab + b^2$ делится на 13 (числа a и b – целые). Верно ли, что тогда $a^2 - b^2$ тоже обязательно делится на 13 (если верно, то докажите это, если нет – то приведите контрпример).

Ответ: верно

Решение: $a^2 - 11ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 13ab = (a + b)^2 - 13ab$. Поскольку $a^2 - 11ab + b^2$ делится на 13, значит $a^2 - 11ab + b^2 = 13k$, где $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $(a + b)^2 - 13ab = 13k$, где $k \in \mathbb{Z}$, откуда $(a + b)^2 = 13(ab + k)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $(a + b)^2$ делится на 13. Поскольку 13 – простое число, значит, $(a + b)$ делится на 13. Тогда $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ тоже делится на 13.

Задача 3.2. (8 баллов)

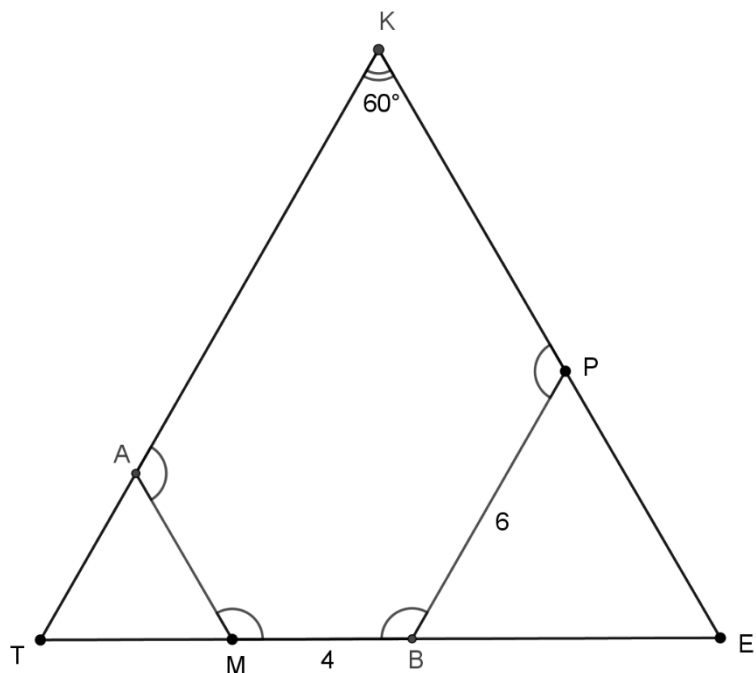
Дан пятиугольник $KAMB P$, в котором $\angle K = 60^\circ$, а остальные углы равны между собой. Найдите длину стороны KA пятиугольника, если $MB = 4$, $BP = 6$.

Ответ: 10.

Решение.

Так как сумма углов пятиугольника равна 540° , то четыре равных угла пятиугольника будут по 120° .

Продолжим стороны AK и MB пятиугольника до пересечения в точке T , а стороны KP и MB пятиугольника до пресечения в точке E и рассмотрим треугольники AMT и PBE . Они равносторонние, так как в каждом



из них есть по два угла, смежных с углами 120° (по признаку равностороннего треугольника).

Таким образом, треугольник KTE так же является равносторонним, так как все его углы по 60° .

Так как треугольник PBE равносторонний, то $BE = 6$, то есть $ME = 10$. Тогда искомый отрезок KA можно найти, как разность $TK - AT = TK - TM = TE - TM = 10$.

Задача 3.3. (8 баллов).

Незнайка сказал, что в 1000-значном числе, в записи которого только одни пятерки, можно заменить одну пятерку на другую цифру, и получившееся число станет точным квадратом. Можно ли верить Незнайке? Обоснуйте свой ответ

Решение. 1 способ.

1) Ни одно число, являющееся полным квадратом, не может оканчиваться на 55. Тогда точно заменили или последнюю, или предпоследнюю цифры.

2) Если менять предпоследнюю цифру, то только на двойку. Пояснение:

$(\dots + 10a + 5)(\dots + 10a + 5) = 1000A + 100a(a + 1) + 25$. Причём $a(a + 1)$ - чётное, то есть предпредпоследняя цифра – тоже чётная. Противоречие.

3) Если менять последнюю цифру, то только на четвёрку или шестёрку.

Пояснение: $(\dots + 10a + b)(\dots + 10a + b) = 1000A + 20ab + b^2$.

Заметим, что b^2 оканчивается, если не на 5, то на одно из следующих чисел: 0; 1; 4; 6; 9.

При $b = \{0; 1; 9\}$ предпоследняя цифра тоже чётная.

При $b = 4$ получим число, дающее при делении на 4 остаток 2, что невозможно для полного квадрата.

При $b = 6$ получим число, дающее при делении на 9 остаток 6, что невозможно для полного квадрата.

Ответ: нет.

Решение. 2 способ.

Верить нельзя. У квадрата при делении на 9 могут быть остатки 0, 1, 4 и 7. У нашего числа 999 пятерок, то есть оставшаяся цифра 0, 1, 4 или 7. На две нечетные цифры (15, 51, 75) квадрат заканчиваться не может, так как тогда будет остаток 3 при делении на 4. 57 заканчивается на 7, значит, не может быть квадратом. То есть наше число заканчивается на 50, 54, 05 или 45.

50 и 54 дают остаток 2 при делении на 4, то есть тоже не подходят.

05 и 45 делятся на 5, но не делятся на 25, то есть такие числа тоже не являются квадратами.

Ответ: нет.

IV тур.

Задача 4. (9 баллов)

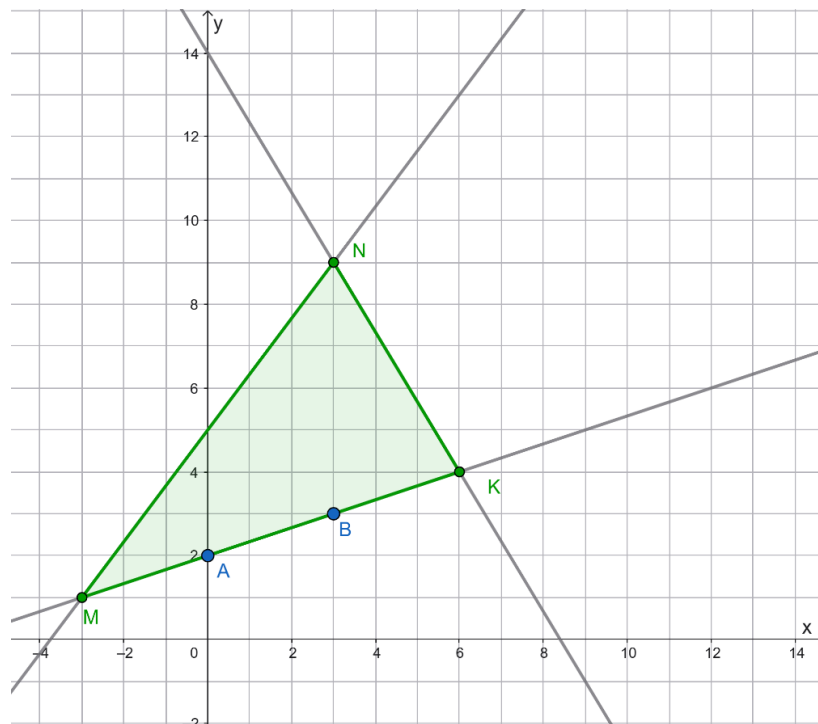
На уроке математики учитель попросил учеников построить на клетчатой бумаге в одной системе координат графики двух функций: $y = \frac{4}{3}x + 5$ и $y = -\frac{5}{3}x + 14$. Записать уравнение прямой AB , проходящей через точки $A(0; 2)$ и $B(3; 3)$. Построить прямую AB в той же системе координат. Найти площадь образовавшейся фигуры (ограниченной тремя построенными линиями). Попробуйте и вы выполнить все пункты этого задания.

Ответ: графики представлены на рисунке, прямая AB задается уравнением $y = \frac{1}{3}x + 2$, образуется треугольник площади 27.

Решение.

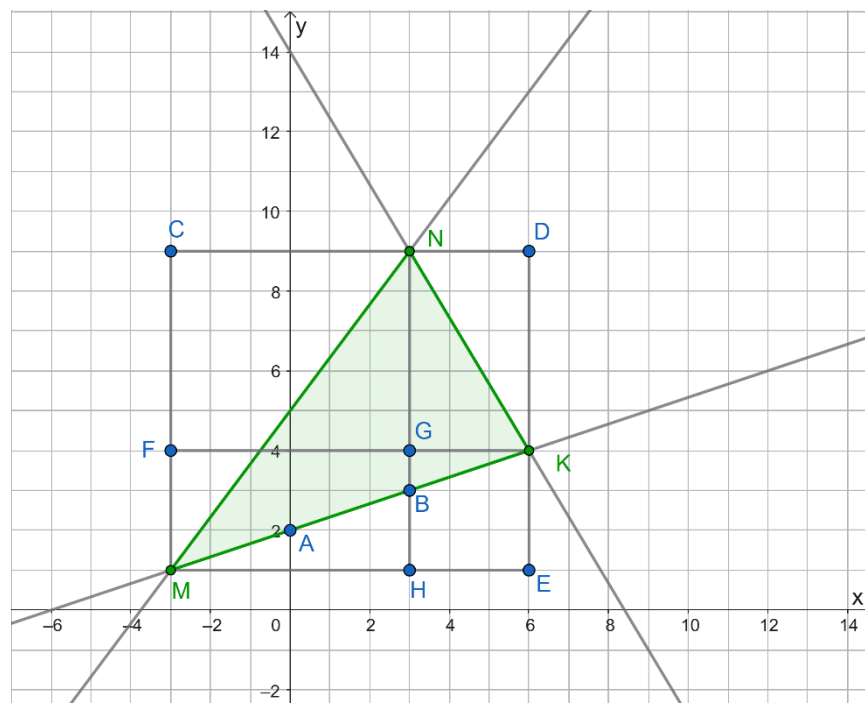
Запишем уравнения третьей прямой $y = kx + b$: $\begin{cases} 2 = k \cdot 0 + b \\ 3 = k \cdot 3 + b \end{cases}$, откуда $k = \frac{1}{3}$, $b = 2$,

т.е. прямая имеет вид $y = \frac{1}{3}x + 2$. Построим эти прямые в одной системе координат:



Три построенные прямые ограничивают треугольник. Найдём его площадь. Для этого построим фигуру до прямоугольника $CDEM$.

Площадь прямоугольника $CDEM$ равна $8 \cdot 9 = 72$, тогда площадь треугольника MNK можно найти, вычитая из площади прямоугольника $CDEM$ площади треугольников: NDK , KEM и MCN . Найдём площади этих треугольников как половину площади



соответствующего прямоугольника: $S_{MKE} = \frac{1}{2} S_{MFKE}$, $S_{NDK} = \frac{1}{2} S_{NDKG}$, $S_{MCN} = \frac{1}{2} S_{MCNH}$.

Получаем: $S_{MNK} = 72 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 72 - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 3 - 24 = 72 - 21 - 24 = 72 - 45 = 27$

Задача 4.2. (9 баллов)

На сторонах PE и KE квадрата $PMKE$ выбраны соответственно точки A и B так, что $\angle PMA = 15^\circ$ и $\angle BAE = 30^\circ$. Найдите угол AMB .

Ответ: 45° .

Решение.

Так как углы PAM , MAV и BAE составляют развёрнутый угол, то угол MAV равен $180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$.

Опустим перпендикуляр MN на отрезок AB из точки M и рассмотрим прямоугольные треугольники MPA и MNA . Они равны по гипотенузе и острому углу, а, значит, $MP = MN$ и угол $AMN = 15^\circ$.

Если стороны квадрата равны, то $MN = MK$ и прямоугольные треугольники NMB и KMB равны по катету и гипотенузе, и соответственно равные углы NMB и KMB можно найти, как $(90^\circ - 15^\circ - 15^\circ) : 2 = 30^\circ$. Таким образом, искомый угол AMB равен $30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

Задача 4.3. (9 баллов)

Назовем «полупростым» число, являющееся произведением двух, не обязательно разных, простых чисел. Найдите все «полупростые» числа x , меньшие 1000, такие, что $x^3 + 2025x^2$ является точным квадратом.

Решение.

Заметим, что если $x^3 + 2025x^2 = x^2(x + 2025)$ является квадратом, то и $x + 2025$ тоже. Пусть $x + 2025 = n^2$, тогда $x = (n - 45)(n + 45)$. Так как x полупростое число, то либо $n - 45 = 1$, $n + 45 = x$, либо обе скобки простые числа. В первом случае $x = 91 = 13 \cdot 7$, подходит. Во втором случае два простых числа отличаются на 90, то есть они оба нечетные, не делятся на 3 и не делятся на 5. Тогда $n - 45$ простое и хотя бы 7. Подходят пара $7 \cdot 97 = 679 < 1000$, а $11 \cdot 101 = 1111 > 1000$.

Ответ: 91 или 679.

