Подмосковная олимпиада учителей математики – 2026.

Задания и решения отборочного тура.

Вариант 1.

№	Задание
1	Сколько различных троек натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 7$? 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 6 РЕШЕНИЕ. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 7 <=> (x + y + z)(x + y - z) = 7$, откуда $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$. Тогда определенно можно сказать, что $z = 3$, а $x + y = 4$. Уравнение $x + y = 4$ имеет 3 решения в натуральных числах. ОТВЕТ: № 3.
2	Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо $f(0) + f(1) = f(2) + f(3) = 0$. Выберите верное(ые) утверждение(я) об этой $f(x)$. 1) $b = -3a$ всегда. 2) $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > ac$ всегда. 3) Сумма нулей функции $f(x)$ равна 3. 4) Один из нулей функции гарантированно будет меньше 0,5. 5) Можно однозначно определить нули функции $f(x)$. РЕШЕНИЕ. $f(0) + f(1) = f(2) + f(3) = 0 <=> \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 13a + 5b + 2c = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} b = -3a \\ c = a \end{cases}$ Имеем $f(x) = ax^2 - 3ax + a = a(x^2 - 3x + 1)$. $f(x) = 0 <=> x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. ОТВЕТЫ: №№ 1, 2, 3, 4, 5.

3 Для скольких целых значений параметра a уравнение $2cos^2x + sin2x = a$ имеет хотя бы 1 вещественный корень?

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6
5) 9

РЕШЕНИЕ.

$$2cos^2x + sin2x = 1 + cos2x + sin2x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$E\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}].$$

$$\{0; 1; 2\} \in E\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

ОТВЕТ: № 1.

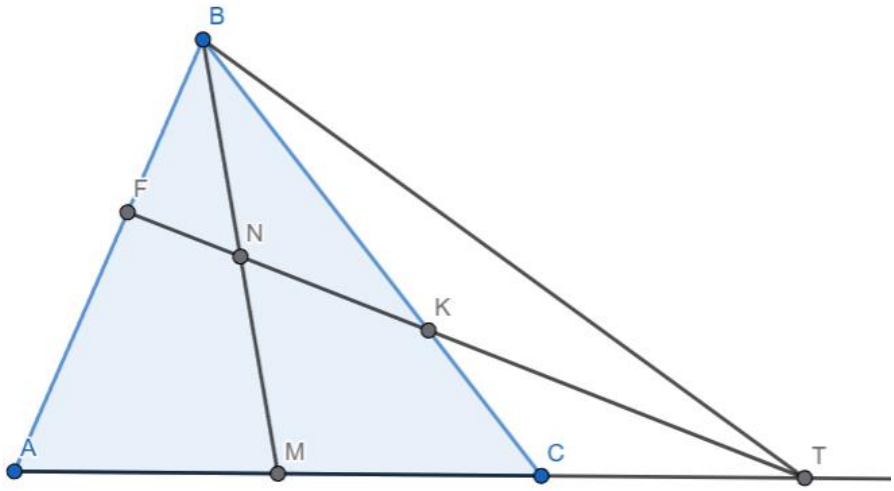
4 Угол между какими-то двумя образующими прямого кругового конуса равен $60°$.

Выберите гарантированно верное(ые) утверждение(я) об этом конусе:

1) Диаметр основания конуса не короче образующей.
2) Площадь боковой поверхности конуса как минимум вдвое превосходит площадь его основания.
3) Найдется сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником с углами $30°;\ 75°; 75°$.
4) Объём такого конуса может быть больше $0{,}1\pi l^3$, где l – длина образующей.
5) Центры описанной сферы этого конуса и вписанной в него сферы никогда не совпадут.

РЕШЕНИЕ:
Из условия следует, что существует сечение конуса, являющееся правильным треугольником, одна из сторон которого – хорда основания.
1) Верно, так как диаметр окружности не может быть короче её хорды.
Несложно догадаться, что угол напротив основания осевого сечения конуса будет не менее 60 градусов, то есть, угол наклона φ образующей конуса к плоскости его основания будет не более 60 градусов.
2) Неверно: $cos\varphi = \frac{R}{l} = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} \geq \frac{1}{2} <=> S_{\text{бок}} \leq 2S_{\text{осн}}$.
3) Верно, так как нашлось и сечение, являющееся равнобедренным треугольником с углом напротив основания, превосходящим $30°$.
4) Верно. Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Принимая образующую за l, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания за φ, имеем $V(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos^2\varphi \cdot sin\varphi$.
$V'(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos\varphi(1 - 3sin^2\varphi)$. $\begin{cases} V'(\varphi) = 0 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{3} \end{cases} <=> \varphi = arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка максимума. $V_{\text{наиб.}} = \frac{\pi}{3}l^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27} > 0{,}1\pi l^3$. $\lim\limits_{\varphi \to 0} V(\varphi) = 0$.
5) Неверно. Если осевое сечение конуса – равносторонний треугольник, то центры сфер совпадут.

ОТВЕТЫ: №№ 1, 3, 4.

5	Через середину медианы BM треугольника ABC провели прямую m, делящую сторону AB в отношении $2:3$, считая от вершины B. Пусть прямая m пересекает сторону BC в точке K. $CK = 42$. Найдите BK. 1) 63 2) 70 3) 84 4) 105 5) 126 РЕШЕНИЕ:  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BN}{NM} \cdot \frac{MT}{TA} = 1 <=> \frac{MT}{TA} = \frac{2}{3} => AM = MC = CT => K -$ центроид ΔBMT. Тогда $\frac{BK}{KC} = \frac{2}{1} => BK = 84$. ОТВЕТ: № 3.
6	На острове живут только рыцари (говорят только правду) и лжецы (говорят только ложь). Как-то раз 50 жителей этого острова выстроились в шеренгу, после чего все, кроме крайних, сказали: «Справа от меня лжецов больше, чем слева от меня». Сколько рыцарей могло быть среди них? Укажите все возможные ответы. РЕШЕНИЕ: Пусть крайние двое – рыцари. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 49 рыцарей. Пусть крайние двое – лжецы. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 47 рыцарей. Пусть крайний слева – рыцарь, крайний справа – лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 49 рыцарей. Пусть крайний слева – лжец, крайний справа – рыцарь. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда и третий справа точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 47 рыцарей. ОТВЕТЫ: 47 или 49 рыцарей.

7

Вася выписывал на доску натуральные числа $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots$
После каждого числа Васи Петя записывал на своей доске **медианы*** всех уже имеющихся к тому моменту Васиных чисел.
Вася и Петя записали по 8 чисел. Числа Пети: 5; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 5.

Найдите минимальную сумму чисел, которые мог записать Вася.

***Медиана** в контексте статистики — это серединное значение числового набора, упорядоченного по неубыванию. То есть такое число набора, которое не больше хотя бы половины его элементов и не меньше тоже хотя бы половины.

1. Если в середине упорядоченного по неубыванию ряда остаётся одно число, его и считают медианой.
2. Если в середине осталось два числа, то нужно найти их полусумму. Полученное значение и будет являться медианой числового ряда.

РЕШЕНИЕ:
Оценка: Первые два числа Васи определяются однозначно: это 5 и 3.
Так как среди чисел Васи точно есть 5-ка, а медиана всех его восьми чисел равна 5, то у него не могло быть более трёх чисел, каждое из которых меньше пяти.
Среди этих трех чисел одно уже известно, а минимальное значение двух других – это единицы.
Все числа, не меньшие 5, «выгодно» сделать пятерками.
Покажем достижимость приведенной оценки.
Минимизируем каждое из оставшихся чисел Васи.
Третье число Васи минимум 5. Четвёртое – минимум 5. Пятое – минимум 1.
Шестое – минимум 5. Седьмое – минимум 1. Восьмое – минимум 5.

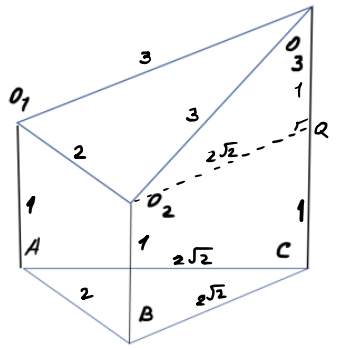
Итоговая минимальная сумма Васи равна $5 + 3 + 5 + 5 + 1 + 5 + 1 + 5 = 30$.

ОТВЕТ: 30.

8

Три шара радиусов 1; 1; 2 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите косинус угла между плоскостями α и β, каждая из которых касается всех трёх шаров.

РЕШЕНИЕ:
Пусть $O_1; O_2; O_3$ – центры шаров. $A; B; C$ – точки касания шаров с плоскостью α.
Плоскость, проходящая через центры шаров, делит двугранный угол φ, образованный α и β, пополам.



Тогда $cos\frac{\varphi}{2} = \frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$.
Откуда $cos\varphi = 2cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{3}{4}$.

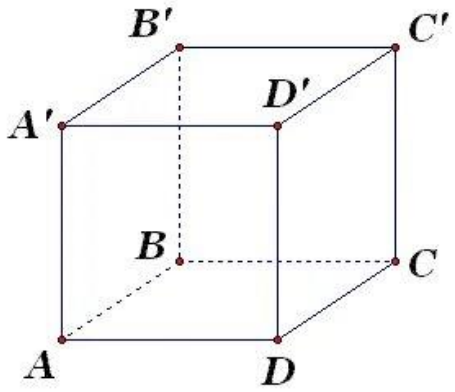
ОТВЕТ: 0,75.

9

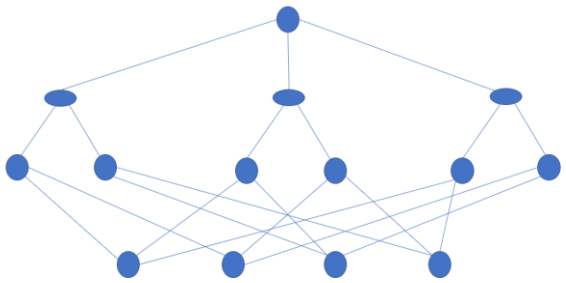
А) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а **все** его **простые циклы** имеют длину как минимум 4.

Б) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а **все** его **простые циклы** имеют длину как минимум 6.

РЕШЕНИЕ:
А) Вполне подойдет каркас куба.



Б) Вполне подойдет такой граф.



10

Для четырёх положительных чисел $a;\ b;\ c;\ d$ справедливы равенства $ab + cd = ac + bd = 4; ad + bc = 5.$

А) Приведите пример хотя бы одной такой четверки чисел $a;\ b;\ c;\ d$.
Б) Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

РЕШЕНИЕ:
$S^2 = (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 26.$
Из равенства $ab + cd = ac + bd = 4$ следует, что
$(a - d)(b - c) = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a = d \\ b = c \end{array}\right.$.
При $a = d$ имеем $ad + bc = a^2 + bc = 5$.
Тогда $2a^2 = 10 - 2bc$.
Тогда $S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 26 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 26 = (b - c)^2 + 36 \geq 36$.
Тогда $S \geq 6$.
Такую же оценку получим при выдвижении условия $b = c$.
$S = 6$ достигается при $a = d = 1; b = c = 2$.

ОТВЕТЫ: А) $a = d = 1; b = c = 2$ Б) 6.

11 Выпускники 11 класса Маша, Даша и Петя поспорили друг с другом о том, «каких квадратных уравнений существует больше: тех, у которых два вещественных корня или тех, у кого вещественных корней вообще нет?»

Петя начал рассуждать так: «Всякое квадратное уравнение можно сделать приведённым: $x^2 + rx + q = 0$. Если q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть. Поскольку q – случайная величина и
$p(q > 0) = p(q < 0)$, то квадратных уравнений с корнями больше, тем более при $q = 0$ корни тоже будут.»

На это возразила Даша, сказав, что дискриминант $D = r^2 - 4q$ квадратного уравнения – тоже случайная величина, распределённая на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поэтому $p(D > 0) = p(D < 0)$.

Маша, увлечённая программированием, просто сделала «рандомизатор» - генератор приведенных квадратных уравнений вида $x^2 + rx + q = 0$.
Ограничив $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ с точностью до 5 знаков после запятой, Маша получила, что из 1000 случайно сгенерированных компьютером квадратных уравнений, 646 оказались с двумя вещественными корнями, а 354 – без них. После чего Маша сказала, что, похоже, что $2/3$ всех квадратных уравнений имеют вещественные корни, а $1/3$ – нет.

P.S. Лексика учеников, даже при постановке вопроса, преимущественно, сохранена.

А) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«если в уравнении $x^2 + rx + q = 0$ значение q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть.»

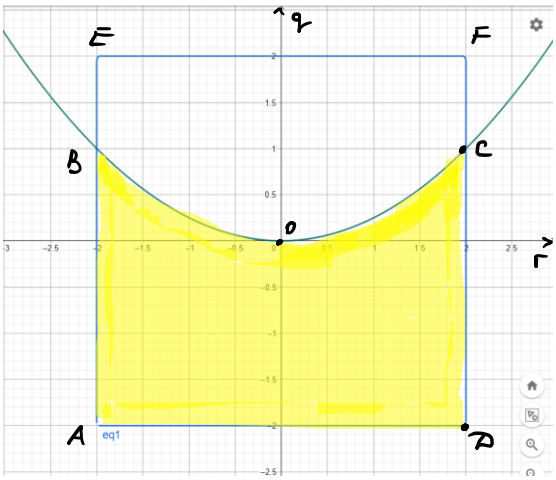
РЕШЕНИЕ:
Прав.
$D = r^2 - 4q > 0$ при $q < 0$.
Знак $D = r^2 - 4q$ при $q > 0$ однозначно определяется.

Б) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«поскольку q – случайная величина и $p(q > 0) = p(q < 0)$, то вероятность получения квадратного уравнения с 2 корнями выше, чем вероятность генерирования квадратного уравнения без корней»

РЕШЕНИЕ:
Прав, но не доказал, что $p(q > 0) = p(q < 0)$.
Изначально квадратное уравнение вовсе не обязательно было приведенным. $q = \frac{c}{a}$ – величина, которая с вероятностью, крайне близкой к $\frac{1}{2}$ не превзойдет по модулю единицы. То есть q – неравномерно распределенная величина, однако характер плотности распределения q симметричен относительно оси ординат, поэтому, да, вывод Пети справедлив и имеет место быть, с учетом его предыдущих рассуждений.

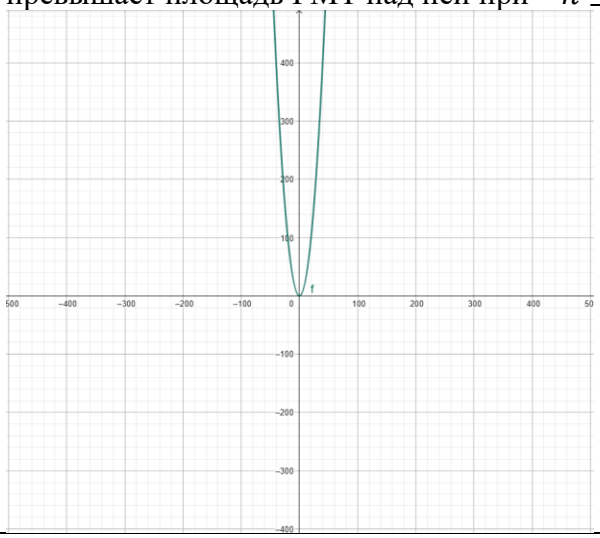
В) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ при условиях $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$?

РЕШЕНИЕ:
Следует признать, что «рандомизатор» Маши не ставит ответа на изначальный вопрос, потому что никем из ребят не учтено, что q – неравномерно распределенная величина.
Однако в контексте приведенных квадратных уравнений условие $D = r^2 - 4q > 0$ верно при $q < \frac{1}{4}r^2$. С учетом ограничений $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$, имеем «благоприятную» область, выделенную на рисунке жёлтым.
Заметим, что площадь невыпуклого пятиугольника $ABOCD$ составляет 62,5% площади квадрата $AEFD$. То есть, догадка Маши неверна (наша вероятность будет меньше 0,625).



Г) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$ без каких-либо ограничений на r и q?

РЕШЕНИЕ:
Очевидно, нет. Площадь ГМТ под графиком параболы $q = \frac{1}{4}r^2$ уж точно не вдвое, а в куда большую, даже можно сказать, в бесконечно большую величину, превышает площадь ГМТ над ней при $-n \le r \le n;\ -n \le q \le n; n \to +\infty$.



	Д) Почему Даша ошибается в своём суждении о том, что распределенная на промежутке $(-\infty; +\infty)$ непрерывная случайная величина дискриминанта D обладает свойством $p(D > 0) = p(D < 0)$? РЕШЕНИЕ: Непрерывности случайной величины дискриминанта D для установления свойства $p(D > 0) = p(D < 0)$ недостаточно. Бесспорно, коэффициенты неприведенного квадратного уравнения можно принимать как равномерно распределенные непрерывные на R случайные величины (случаем $a = 0$ в данном контексте можно пренебречь как практически невозможным). Однако уже b^2 будет распределена неравномерно, а $D = b^2 - 4ac$ – тем более. Распределение D неравномерно и симметрично не относительно нулевой абсциссы, а абсциссы b^2.

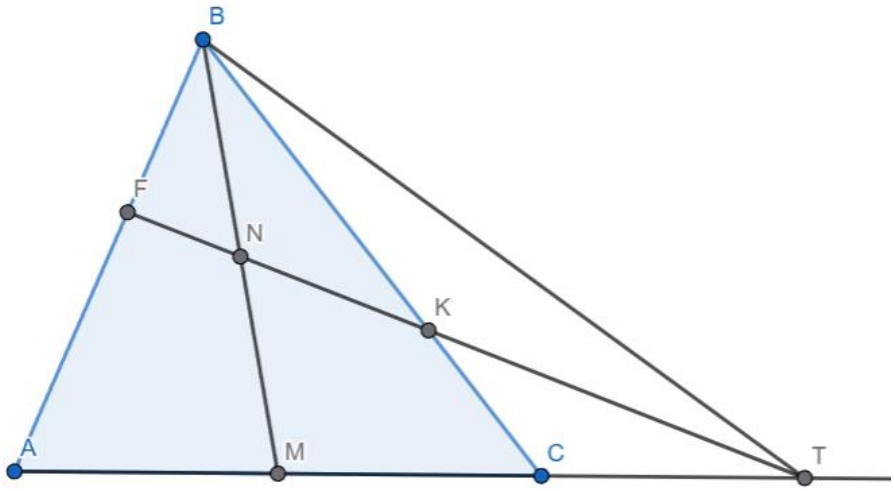
Подмосковная олимпиада учителей математики – 2026.

Задания и решения отборочного тура.

Вариант 2.

№	Задание
1	Сколько различных троек натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 11$? 1) 1 2) 3 3) 5 4) 6 5) 10 РЕШЕНИЕ. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 11 <=> (x + y + z)(x + y - z) = 11$, откуда $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$. Тогда определенно можно сказать, что $z = 5$, а $x + y = 6$. Уравнение $x + y = 6$ имеет 5 решений в натуральных числах. ОТВЕТ: № 3.
2	Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо $f(0) + f(1) = f(3) + f(4) = 0$. Выберите верное(ые) утверждение(я) об этой $f(x)$. 1) $b = -4a$ всегда. 2) $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > ac$ всегда. 3) Сумма нулей функции $f(x)$ равна 4. 4) Один из нулей функции гарантированно будет больше 3,5. 5) Можно однозначно определить нули функции $f(x)$. РЕШЕНИЕ. $f(0) + f(1) = f(3) + f(4) = 0 <=> \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 25a + 7b + 2c = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} b = -4a \\ c = 1{,}5a \end{cases}$ Имеем $f(x) = ax^2 - 4ax + 1{,}5a = a(x^2 - 4x + 1{,}5)$. $f(x) = 0 <=> x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$. ОТВЕТЫ: №№ 1, 2, 3, 4, 5.

3	Для скольких целых значений параметра a уравнение $2sin^2x + sin2x = a$ имеет хотя бы 1 вещественный корень? 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6 5) 9 РЕШЕНИЕ. $$2sin^2x + sin2x = 1 - cos2x + sin2x = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$ $$E\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}].$$ $$\{0; 1; 2\} \in E\left(1 + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$ ОТВЕТ: № 1.
4	Угол между какими-то двумя образующими прямого кругового конуса равен $60°$. Выберите гарантированно верное(ые) утверждение(я) об этом конусе: 1) Радиус основания конуса не длиннее половины образующей. 2) Площадь боковой поверхности конуса не более чем вдвое превосходит площадь его основания. 3) Найдется сечение конуса, площадь которого равна $0{,}25l^2$, где l – длина образующей. 4) Объём такого конуса может быть больше $0{,}15\pi l^3$, где l – длина образующей. 5) Центры описанной сферы этого конуса и вписанной сферы могут совпадать. РЕШЕНИЕ: Из условия следует, что существует сечение конуса, являющееся правильным треугольником, одна из сторон которого – хорда основания. 1) Неверно. Если провести радиусы к концам этой хорды, то в полученном треугольнике верно неравенство $R + R \geq l <=> R \geq 0.5l$. 2) Верно: $cos\varphi = \frac{R}{l} = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} \geq \frac{1}{2} <=> S_{\text{бок}} \leq 2S_{\text{осн}}$. 3) Верно, найдется и сечение, являющееся равнобедренным треугольником с углом напротив основания, равным $30°$, площадь которого равна $0{,}25l^2$. 4) Неверно. Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Принимая образующую за l, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания за φ, имеем $V(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos^2\varphi \cdot sin\varphi$. $V'(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos\varphi(1 - 3sin^2\varphi)$. $\begin{cases} V'(\varphi) = 0 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{3} \end{cases} <=> \varphi = arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка максимума. $V_{\text{наиб.}} = \frac{\pi}{3}l^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27} < 0{,}15\pi l^3$. 5) Верно. Если осевое сечение конуса – равносторонний треугольник, то центры сфер совпадут. ОТВЕТЫ: №№ 2, 3, 5.

5	Через середину медианы BM треугольника ABC провели прямую m, делящую сторону AB в отношении $2:3$, считая от вершины B. Пусть прямая m пересекает сторону BC в точке K. $BK = 24$. Найдите CK. 1) 8 2) 12 3) 6 4) 16 5) 9,6 РЕШЕНИЕ:  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BN}{NM} \cdot \frac{MT}{TA} = 1 <=> \frac{MT}{TA} = \frac{2}{3} => AM = MC = CT => K -$ центроид ΔBMT. Тогда $\frac{BK}{KC} = \frac{2}{1} => CK = 12$. ОТВЕТ: № 2.
6	На острове живут только рыцари (говорят только правду) и лжецы (говорят только ложь). Как-то раз 40 жителей этого острова выстроились в шеренгу, после чего все, кроме крайних, сказали: «Справа от меня лжецов больше, чем слева от меня». Сколько рыцарей могло быть среди них? Укажите все возможные ответы. РЕШЕНИЕ: Пусть крайние двое – рыцари. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 39 рыцарей. Пусть крайние двое – лжецы. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 37 рыцарей. Пусть крайний слева – рыцарь, крайний справа – лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 39 рыцарей. Пусть крайний слева – лжец, крайний справа – рыцарь. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда и третий справа точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 37 рыцарей. ОТВЕТЫ: 37 или 39 рыцарей.

7

Вася выписывал на доску натуральные числа $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots$
После каждого числа Васи Петя записывал на своей доске **медианы*** всех уже имеющихся к тому моменту Васиных чисел.
Вася и Петя записали по 8 чисел. Числа Пети: 7; 5; 7; 7; 7; 7; 7; 7.

Найдите минимальную сумму чисел, которые мог записать Вася.

***Медиана** в контексте статистики — это серединное значение числового набора, упорядоченного по неубыванию. То есть такое число набора, которое не больше хотя бы половины его элементов и не меньше тоже хотя бы половины.

1. Если в середине упорядоченного по неубыванию ряда остаётся одно число, его и считают медианой.
2. Если в середине осталось два числа, то нужно найти их полусумму. Полученное значение и будет являться медианой числового ряда.

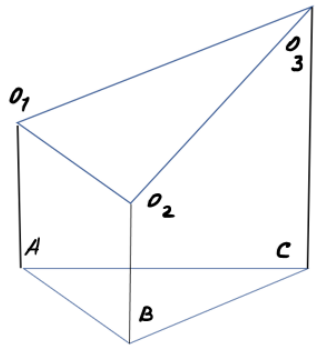
РЕШЕНИЕ:
Оценка: Первые два числа Васи определяются однозначно: это 7 и 3.
Так как среди чисел Васи точно есть 7-ка, а медиана всех его восьми чисел равна 7, то у него не могло быть более трёх чисел, каждое из которых меньше 7.
Среди этих трех чисел одно уже известно, а минимальное значение двух других – это единицы.
Все числа, не меньшие 7, «выгодно» сделать семерками.
Покажем достижимость приведенной оценки.
Минимизируем каждое из оставшихся чисел Васи.
Третье число Васи минимум 7. Четвёртое – минимум 7. Пятое – минимум 1.
Шестое – минимум 7. Седьмое – минимум 1. Восьмое – минимум 7.

Итоговая минимальная сумма Васи равна $7 + 3 + 7 + 7 + 1 + 7 + 1 + 7 = 40$.

ОТВЕТ: 40.

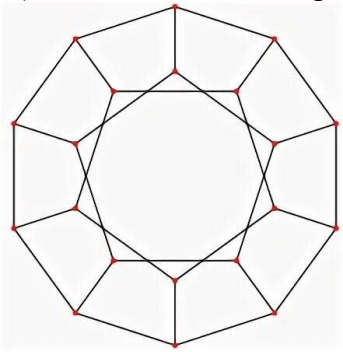
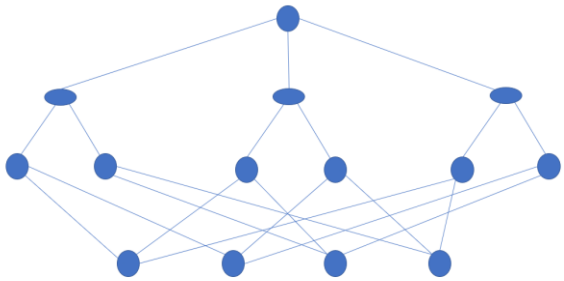
8

Три шара радиусов 2; 2; 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите косинус угла между плоскостями α и β, каждая из которых касается всех трёх шаров.



РЕШЕНИЕ:
Пусть $O_1; O_2; O_3$ – центры шаров. $A; B; C$ – точки касания шаров с плоскостью α.
Плоскость, проходящая через центры шаров, делит двугранный угол φ, образованный α и β, пополам.
Длины сторон треугольника $O_1O_2O_3$ – 4; 5; 5.
Длины сторон треугольника ABC – 4; $2\sqrt{6}$; $2\sqrt{6}$.
Тогда $cos\frac{\varphi}{2} = \frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}} = \sqrt{\frac{20}{21}}$.
Откуда $cos\varphi = 2cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{19}{21}$.

ОТВЕТ: $\frac{19}{21}$.

9	А) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а **все** его **простые циклы** имеют длину как минимум 5. Б) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а **все** его **простые циклы** имеют длину как минимум 6. РЕШЕНИЕ: А) Вполне подойдет каркас додекаэдра.  Б) Вполне подойдет такой граф. 
10	Для четырёх положительных чисел $a;\ b;\ c;\ d$ справедливы равенства $ab + cd = ac + bd = 16; ad + bc = 20$. А) Приведите пример хотя бы одной такой четверки чисел $a;\ b;\ c;\ d$. Б) Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$. РЕШЕНИЕ: $S^2 = (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) =$ $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 104.$ Из равенства $ab + cd = ac + bd = 16$ следует, что $(a - d)(b - c) = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a = d \\ b = c \end{array}\right.$. При $a = d$ имеем $ad + bc = a^2 + bc = 20$. Тогда $2a^2 = 40 - 2b$c. Тогда $S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 104 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 104 = (b - \text{c})^2 + 144 \geq$ 144. Тогда $S \geq 12$. Такую же оценку получим при выдвижении условия $b = c$. $S = 12$ достигается при $a = d = 2; b = c = 4$. ОТВЕТЫ: А) $a = d = 2; b = c = 4$ Б) 12.

11 Выпускники 11 класса Маша, Даша и Петя поспорили друг с другом о том, «каких квадратных уравнений существует больше: тех, у которых два вещественных корня или тех, у кого вещественных корней вообще нет?»

Петя начал рассуждать так: «Всякое квадратное уравнение можно сделать приведённым: $x^2 + rx + q = 0$. Если q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть. Поскольку q – случайная величина и
$p(q > 0) = p(q < 0)$, то квадратных уравнений с корнями больше, тем более при $q = 0$ корни тоже будут.»

На это возразила Даша, сказав, что дискриминант $D = r^2 - 4q$ квадратного уравнения – тоже случайная величина, распределённая на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поэтому $p(D > 0) = p(D < 0)$.

Маша, увлечённая программированием, просто сделала «рандомизатор» - генератор приведенных квадратных уравнений вида $x^2 + rx + q = 0$.
Ограничив $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ с точностью до 5 знаков после запятой, Маша получила, что из 1000 случайно сгенерированных компьютером квадратных уравнений, 646 оказались с двумя вещественными корнями, а 354 – без них. После чего Маша сказала, что, похоже, что $2/3$ всех квадратных уравнений имеют вещественные корни, а $1/3$ – нет.

P.S. Лексика учеников, даже при постановке вопроса, преимущественно, сохранена.

А) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«если в уравнении $x^2 + rx + q = 0$ значение q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть.»

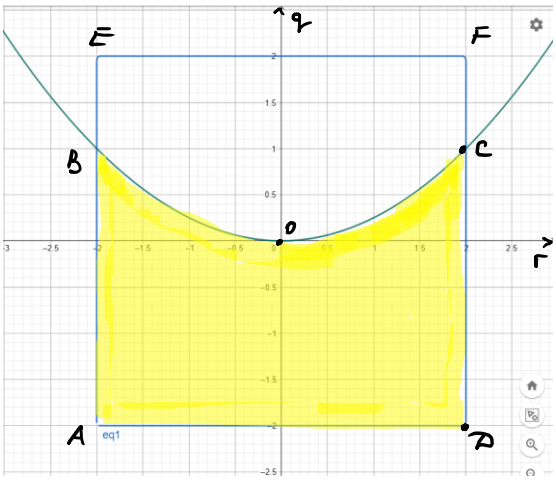
РЕШЕНИЕ:
Прав.
$D = r^2 - 4q > 0$ при $q < 0$.
Знак $D = r^2 - 4q$ при $q > 0$ однозначно определяется.

Б) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«поскольку q – случайная величина и $p(q > 0) = p(q < 0)$, то вероятность получения квадратного уравнения с 2 корнями выше, чем вероятность генерирования квадратного уравнения без корней»

РЕШЕНИЕ:
Прав, но не доказал, что $p(q > 0) = p(q < 0)$.
Изначально квадратное уравнение вовсе не обязательно было приведенным. $q = \frac{c}{a}$ – величина, которая с вероятностью, крайне близкой к $\frac{1}{2}$ не превзойдет по модулю единицы. То есть q – неравномерно распределенная величина, однако характер плотности распределения q симметричен относительно оси ординат, поэтому, да, вывод Пети справедлив и имеет место быть, с учетом его предыдущих рассуждений.

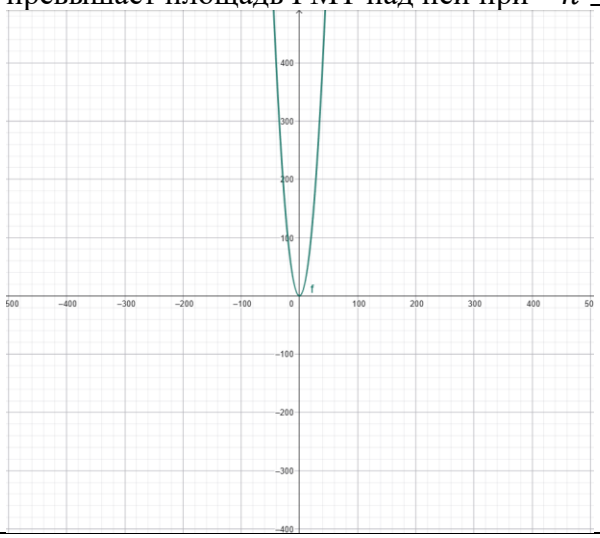
В) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ при условиях $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$?

РЕШЕНИЕ:
Следует признать, что «рандомизатор» Маши не ставит ответа на изначальный вопрос, потому что никем из ребят не учтено, что q – неравномерно распределенная величина.
Однако в контексте приведенных квадратных уравнений условие $D = r^2 - 4q > 0$ верно при $q < \frac{1}{4}r^2$. С учетом ограничений $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$, имеем «благоприятную» область, выделенную на рисунке жёлтым.
Заметим, что площадь невыпуклого пятиугольника $ABOCD$ составляет 62,5% площади квадрата $AEFD$. То есть, догадка Маши неверна (наша вероятность будет меньше 0,625).



Г) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$ без каких-либо ограничений на r и q?

РЕШЕНИЕ:
Очевидно, нет. Площадь ГМТ под графиком параболы $q = \frac{1}{4}r^2$ уж точно не вдвое, а в куда большую, даже можно сказать, в бесконечно большую величину, превышает площадь ГМТ над ней при $-n \le r \le n;\ -n \le q \le n; n \to +\infty$..



	Д) Почему Даша ошибается в своём суждении о том, что распределенная на промежутке $(-\infty; +\infty)$ непрерывная случайная величина дискриминанта D обладает свойством $p(D > 0) = p(D < 0)$? РЕШЕНИЕ: Непрерывности случайной величины дискриминанта D для установления свойства $p(D > 0) = p(D < 0)$ недостаточно. Бесспорно, коэффициенты неприведенного квадратного уравнения можно принимать как равномерно распределенные непрерывные на R случайные величины (случаем $a = 0$ в данном контексте можно пренебречь как практически невозможным). Однако уже b^2 будет распределена неравномерно, а $D = b^2 - 4ac$ – тем более. Распределение D неравномерно и симметрично не относительно нулевой абсциссы, а абсциссы b^2.

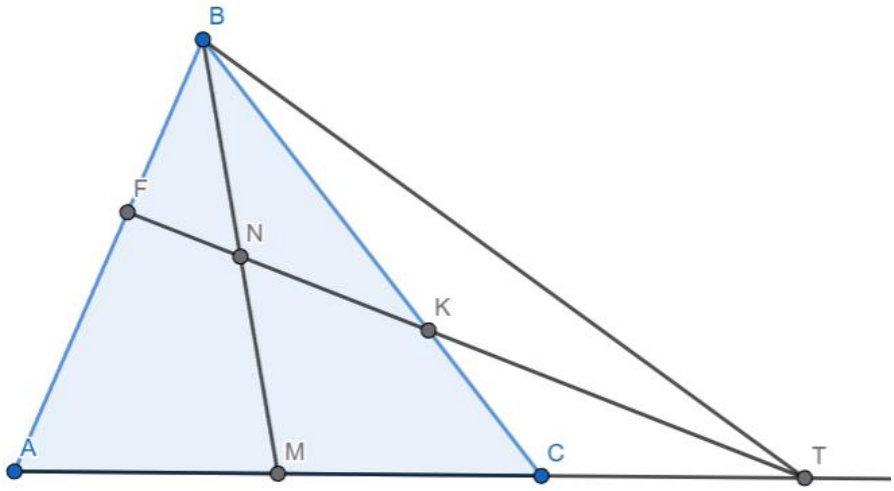
Подмосковная олимпиада учителей математики – 2026.

Задания и решения отборочного тура.

Вариант 3.

№	Задание
1	Сколько различных троек натуральных чисел $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 9$? 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5 РЕШЕНИЕ. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 9 <=> (x + y + z)(x + y - z) = 9$, откуда $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$. Тогда определенно можно сказать, что $z = 4$, а $x + y = 5$. Уравнение $x + y = 5$ имеет 4 решения в натуральных числах. ОТВЕТ: № 4.
2	Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ справедливо $f(0) + f(1) = f(4) + f(5) = 0$. Выберите верное(ые) утверждение(я) об этой $f(x)$. 1) $b = -5a$ всегда. 2) $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > ac$ всегда. 3) Сумма нулей функции $f(x)$ равна 5. 4) Модуль разности нулей функции $f(x)$ гарантированно больше 4. 5) Можно однозначно определить нули функции $f(x)$. РЕШЕНИЕ. $f(0) + f(1) = f(4) + f(5) = 0 <=> \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 41a + 9b + 2c = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} b = -5a \\ c = 2a \end{cases}$ Имеем $f(x) = ax^2 - 5ax + 2a = a(x^2 - 5x + 2)$. $f(x) = 0 <=> x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. ОТВЕТЫ: №№ 1, 2, 3, 4, 5.

3	Для скольких целых значений параметра a уравнение $2cos^2x - sin2x = a$ имеет хотя бы 1 вещественный корень? 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6 5) 9 РЕШЕНИЕ. $$2cos^2x - sin2x = 1 + cos2x - sin2x = 1 - \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$ $$E\left(1 - \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}].$$ $$\{0; 1; 2\} \in E\left(1 - \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$ ОТВЕТ: № 1.
4	Угол между какими-то двумя образующими прямого кругового конуса равен $60°$. Выберите гарантированно верное(ые) утверждение(я) об этом конусе: 1) Диаметр основания конуса больше его образующей. 2) Площадь полной поверхности конуса максимум втрое может превзойти площадь его основания. 3) Найдется сечение конуса, являющееся равнобедренным треугольником с углами $80°;\ 50°; 50°$. 4) Объём такого конуса может быть больше $0{,}12\pi l^3$, где l – длина образующей. 5) Центр описанной сферы этого конуса обязательно располагается внутри конуса. РЕШЕНИЕ: Из условия следует, что существует сечение конуса, являющееся правильным треугольником, одна из сторон которого – хорда основания. 1) Неверно. Осевое сечение могло быть правильным треугольником. 2) Верно: $cos\varphi = \frac{R}{l} = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} \geq \frac{1}{2} <=> S_{\text{бок}} \leq 2S_{\text{осн}} <=> S_{\text{полн}} \leq 3S_{\text{осн}}$. 3) Неверно, осевое сечение могло быть правильным треугольником, тогда не будет двух образующих, угол между которыми 80 градусов. 4) Верно. Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. Принимая образующую за l, а угол наклона образующей конуса к плоскости его основания за φ, имеем $V(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos^2\varphi \cdot sin\varphi$. $V'(\varphi) = \frac{\pi}{3}l^3cos\varphi(1 - 3sin^2\varphi)$. $\begin{cases} V'(\varphi) = 0 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{3} \end{cases} <=> \varphi = arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ – точка максимума. $V_{\text{наиб.}} = \frac{\pi}{3}l^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27} > 0{,}12\pi l^3$. $\lim\limits_{\varphi \to 0} V(\varphi) = 0$. 5) Неверно. Если осевое сечение конуса – тупоугольный треугольник, то центр сферы окажется снаружи конуса. ОТВЕТЫ: №№ 2, 4.

5	Через середину медианы BM треугольника ABC провели прямую m, делящую сторону AB в отношении $2:3$, считая от вершины B. Пусть прямая m пересекает сторону BC в точке K. $CK = 60$. Найдите BK. 1) 80 2) 90 3) 100 4) 120 5) 150 РЕШЕНИЕ:  $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BN}{NM} \cdot \frac{MT}{TA} = 1 <=> \frac{MT}{TA} = \frac{2}{3} => AM = MC = CT => K -$ центроид ΔBMT. Тогда $\frac{BK}{KC} = \frac{2}{1} => BK = 120$. ОТВЕТ: № 4.
6	На острове живут только рыцари (говорят только правду) и лжецы (говорят только ложь). Как-то раз 30 жителей этого острова выстроились в шеренгу, после чего все, кроме крайних, сказали: «Справа от меня лжецов больше, чем слева от меня». Сколько лжецов могло быть среди них? Укажите все возможные ответы. РЕШЕНИЕ: Пусть крайние двое – рыцари. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 29 рыцарей. Пусть крайние двое – лжецы. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 27 рыцарей. Пусть крайний слева – рыцарь, крайний справа – лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 29 рыцарей. Пусть крайний слева – лжец, крайний справа – рыцарь. Тогда второй справа – точно лжец. Тогда и третий справа точно лжец. Тогда второй слева точно рыцарь. Тогда третий слева тоже рыцарь и т.д. 27 рыцарей. ОТВЕТЫ: 1 или 3 лжеца.

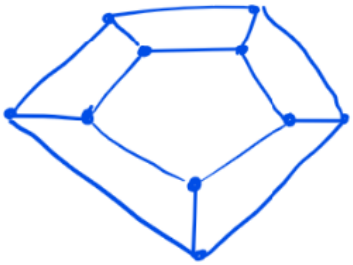
7	Вася выписывал на доску натуральные числа $a_1; a_2; a_3; a_4;$ ... После каждого числа Васи Петя записывал на своей доске **медианы*** всех уже имеющихся к тому моменту Васиных чисел. Вася и Петя записали по 8 чисел. Числа Пети: 6; 4; 6; 6; 6; 6; 6; 6. Найдите минимальную сумму чисел, которые мог записать Вася. ***Медиана** в контексте статистики — это серединное значение числового набора, упорядоченного по неубыванию. То есть такое число набора, которое не больше хотя бы половины его элементов и не меньше тоже хотя бы половины. 1. Если в середине упорядоченного по неубыванию ряда остаётся одно число, его и считают медианой. 2. Если в середине осталось два числа, то нужно найти их полусумму. Полученное значение и будет являться медианой числового ряда. РЕШЕНИЕ: **Оценка:** Первые два числа Васи определяются однозначно: это 6 и 2. Так как среди чисел Васи точно есть 6-ка, а медиана всех его восьми чисел равна 6, то у него не могло быть более трёх чисел, каждое из которых меньше 6. Среди этих трех чисел одно уже известно, а минимальное значение двух других – это единицы. Все числа, не меньшие 6, «выгодно» сделать шестёрками. **Покажем достижимость приведенной оценки.** Минимизируем каждое из оставшихся чисел Васи. Третье число Васи минимум 6. Четвёртое – минимум 6. Пятое – минимум 1. Шестое – минимум 6. Седьмое – минимум 1. Восьмое – минимум 6. Итоговая минимальная сумма Васи равна $6 + 2 + 6 + 6 + 1 + 6 + 1 + 6 = 34$. ОТВЕТ: 34.
8	Три шара радиусов 1; 2; 2 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите косинус угла между плоскостями α и β, каждая из которых касается всех трёх шаров. РЕШЕНИЕ: Пусть $O_1; O_2; O_3$ – центры шаров. $A; B; C$ – точки касания шаров с плоскостью α. Плоскость, проходящая через центры шаров, делит двугранный угол φ, образованный α и β, пополам. Длины сторон треугольника $O_1O_2O_3$ – 3; 3; 4. Длины сторон треугольника ABC – $2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$; 4. Тогда $cos\frac{\varphi}{2} = \frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Откуда $cos\varphi = 2cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{3}{5}$. ОТВЕТ: $\frac{3}{5}$.

9

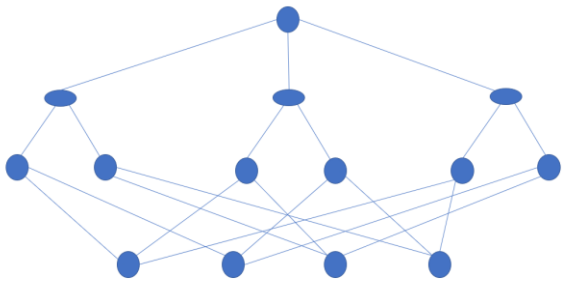
А) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а среди его **простых циклов** есть циклы как длиной 4, так и длиной 5, но нет циклов длины 3.

Б) Изобразите **простой граф**, степень каждой вершины которого равна 3, а **все** его **простые циклы** имеют длину как минимум 6.

РЕШЕНИЕ:
А) Вполне подойдет такой граф.



Б) Вполне подойдет такой граф.



10

Для четырёх положительных чисел $a;\ b;\ c;\ d$ справедливы равенства $ab + cd = ac + bd = 1; ad + bc = 1{,}25$.

А) Приведите пример хотя бы одной такой четверки чисел $a;\ b;\ c;\ d$.
Б) Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

РЕШЕНИЕ:
$S^2 = (a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6{,}5$.
Из равенства $ab + cd = ac + bd = 1$ следует, что
$(a - d)(b - c) = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l} a = d \\ b = c \end{array}\right.$.
При $a = d$ имеем $ad + bc = a^2 + bc = 1{,}25$.
Тогда $2a^2 = 2{,}5 - 2bc$.
Тогда $S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 6{,}5 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 6{,}5 = (b - c)^2 + 9 \geq 9$.
Тогда $S \geq 3$.
Такую же оценку получим при выдвижении условия $b = c$.
$S = 3$ достигается при $a = d = 0{,}5; b = c = 1$.

ОТВЕТЫ: А) $a = d = 0{,}5; b = c = 1$ Б) 3.

11 Выпускники 11 класса Маша, Даша и Петя поспорили друг с другом о том, «каких квадратных уравнений существует больше: тех, у которых два вещественных корня или тех, у кого вещественных корней вообще нет?»

Петя начал рассуждать так: «Всякое квадратное уравнение можно сделать приведённым: $x^2 + rx + q = 0$. Если q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть. Поскольку q – случайная величина и
$p(q > 0) = p(q < 0)$, то квадратных уравнений с корнями больше, тем более при $q = 0$ корни тоже будут.»

На это возразила Даша, сказав, что дискриминант $D = r^2 - 4q$ квадратного уравнения – тоже случайная величина, распределённая на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поэтому $p(D > 0) = p(D < 0)$.

Маша, увлечённая программированием, просто сделала «рандомизатор» - генератор приведенных квадратных уравнений вида $x^2 + rx + q = 0$.
Ограничив $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ с точностью до 5 знаков после запятой, Маша получила, что из 1000 случайно сгенерированных компьютером квадратных уравнений, 646 оказались с двумя вещественными корнями, а 354 – без них. После чего Маша сказала, что, похоже, что $2/3$ всех квадратных уравнений имеют вещественные корни, а $1/3$ – нет.

P.S. Лексика учеников, даже при постановке вопроса, преимущественно, сохранена.

А) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«если в уравнении $x^2 + rx + q = 0$ значение q отрицательно – то корни точно будут, а если положительно – то могут быть, а могут и не быть.»

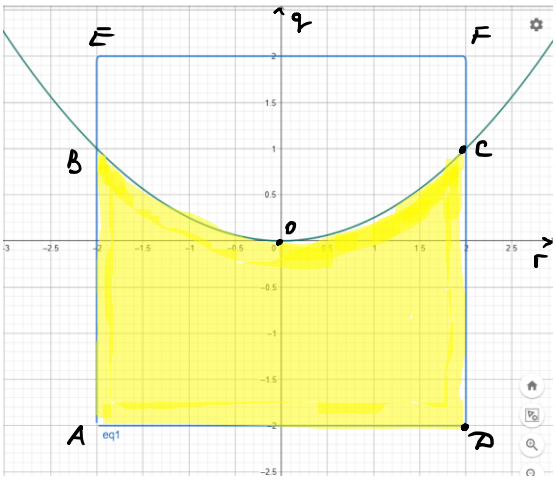
РЕШЕНИЕ:
Прав.
$D = r^2 - 4q > 0$ при $q < 0$.
Знак $D = r^2 - 4q$ при $q > 0$ однозначно определяется.

Б) Прав ли Петя в моменте, когда он рассуждал о том, что
«поскольку q – случайная величина и $p(q > 0) = p(q < 0)$, то вероятность получения квадратного уравнения с 2 корнями выше, чем вероятность генерирования квадратного уравнения без корней»

РЕШЕНИЕ:
Прав, но не доказал, что $p(q > 0) = p(q < 0)$.
Изначально квадратное уравнение вовсе не обязательно было приведенным. $q = \frac{c}{a}$ – величина, которая с вероятностью, крайне близкой к $\frac{1}{2}$ не превзойдет по модулю единицы. То есть q – неравномерно распределенная величина, однако характер плотности распределения q симметричен относительно оси ординат, поэтому, да, вывод Пети справедлив и имеет место быть, с учетом его предыдущих рассуждений.

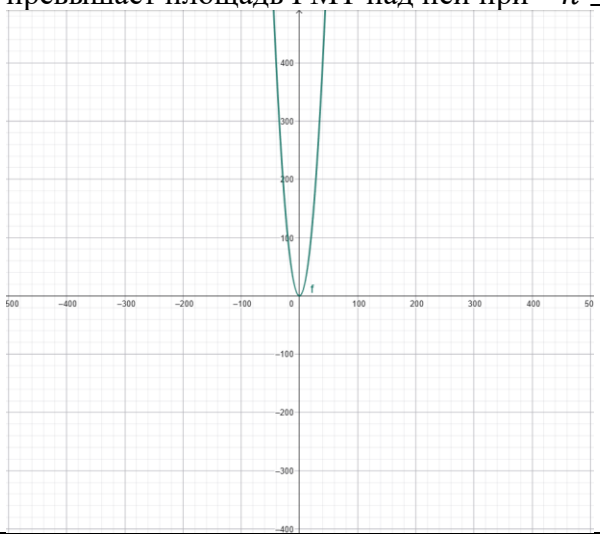
В) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ при условиях $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$?

РЕШЕНИЕ:
Следует признать, что «рандомизатор» Маши не ставит ответа на изначальный вопрос, потому что никем из ребят не учтено, что q – неравномерно распределенная величина.
Однако в контексте приведенных квадратных уравнений условие $D = r^2 - 4q > 0$ верно при $q < \frac{1}{4}r^2$. С учетом ограничений $-2 \le r \le 2;\ -2 \le q \le 2$, имеем «благоприятную» область, выделенную на рисунке жёлтым.
Заметим, что площадь невыпуклого пятиугольника $ABOCD$ составляет 62,5% площади квадрата $AEFD$. То есть, догадка Маши неверна (наша вероятность будет меньше 0,625).



Г) Права ли будет Маша, если выдвинет гипотезу о том, что вероятность того, что случайно сгенерированное квадратное уравнение вида $x^2 + rx + q = 0$ имеет вещественные корни с вероятностью $\frac{2}{3}$ без каких-либо ограничений на r и q?

РЕШЕНИЕ:
Очевидно, нет. Площадь ГМТ под графиком параболы $q = \frac{1}{4}r^2$ уж точно не вдвое, а в куда большую, даже можно сказать, в бесконечно большую величину, превышает площадь ГМТ над ней при $-n \le r \le n;\ -n \le q \le n; n \to +\infty$..



	Д) Почему Даша ошибается в своём суждении о том, что распределенная на промежутке $(-\infty; +\infty)$ непрерывная случайная величина дискриминанта D обладает свойством $p(D > 0) = p(D < 0)$? РЕШЕНИЕ: Непрерывности случайной величины дискриминанта D для установления свойства $p(D > 0) = p(D < 0)$ недостаточно. Бесспорно, коэффициенты неприведенного квадратного уравнения можно принимать как равномерно распределенные непрерывные на R случайные величины (случаем $a = 0$ в данном контексте можно пренебречь как практически невозможным). Однако уже b^2 будет распределена неравномерно, а $D = b^2 - 4ac$ – тем более. Распределение D неравномерно и симметрично не относительно нулевой абсциссы, а абсциссы b^2.