

Подмосковная олимпиада учителей математики – 2025.

Задания финального тура с решениями.

№	Задания и решения
1	А) Может ли для каких-то трёх вещественных положительных чисел $x; y; z$ выполняться система уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,8 \end{cases}$? <i>(2 балла)</i> Б) Может ли для каких-то трёх вещественных положительных чисел $x; y; z$ выполняться система уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,2 \end{cases}$? <i>(3 балла)</i> РЕШЕНИЕ. А) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x + y + z) = \left(\frac{1}{x} + x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + \left(\frac{1}{z} + z\right) = 5,8$. Если все числа $x; y; z$ были положительными, то $\left(\frac{1}{x} + x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + \left(\frac{1}{z} + z\right) \geq 6$, так как модуль суммы двух обратных чисел не менее 2. Противоречие. ОТВЕТ: НЕТ Б) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot (x + y + z) = 3 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = 8,8$. $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = 5,8$. Если все числа $x; y; z$ были положительными, то $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6$, так как модуль суммы двух обратных чисел не менее 2. Противоречие. ОТВЕТ: НЕТ
2	А) На поле А1 (крайняя левая нижняя клетка) шахматной доски 8×8 стоит «королевский конь» - странная шахматная фигура, которая может ходить и как король, и как конь. За один ход игроку разрешается сделать один ход этой фигурой, но такой, что после этого хода фигура не может оказаться левее и/или ниже, чем была до этого. Петя и Вася по очереди делают ходы этой фигуркой. Кто сделает последний ход – тот и победитель. Начинает Петя. Есть ли у кого-то из ребят гарантированно выигрышная стратегия? Какая? <i>(4 балла)</i> Б) Изменится ли потенциальный победитель/выигрышная стратегия победителя, если размеры доски выбрать 9×9, не меняя прочих условий? <i>(1 балл)</i> РЕШЕНИЕ. А) Побеждает Петя. Первым ходом он идет на поле В2. После этого Вася сможет сходить «королевским конём» на любое из пяти полей: В3; С2; С3; С4; D3. Как бы Вася ни сходил, после этого Петя гарантированно сможет поставить фигуру на поле D4. Далее – на F6, далее – на H8, тем самым, побеждая. Б) Побеждает Вася. Первым ходом Петя сможет сходить на любое из пяти полей: А2; В1; В2; В3; С2. После этого Вася сможет из любой Петиней позиции сходить «королевским конём» на поле С3. Как бы Петя ни ходил, Вася далее сможет поставить «королевского коня» – на Е5, далее – на G7 и на I9, тем самым, побеждая.

3

В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$) через точку A провели прямую, параллельную диагонали BD , а через точку D провели прямую, параллельную диагонали AC . Эти прямые пересеклись в точке K . Пусть $BK \cap AD = P$; $CK \cap AD = Q$.

А) Выберите **верный** ответ.

- 1) $AP > QD$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 2) $AP = QD$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 3) $AP < QD$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 4) Сравнить длины отрезков AP и QD невозможно. Знак сравнения зависит от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$). (1 балл)

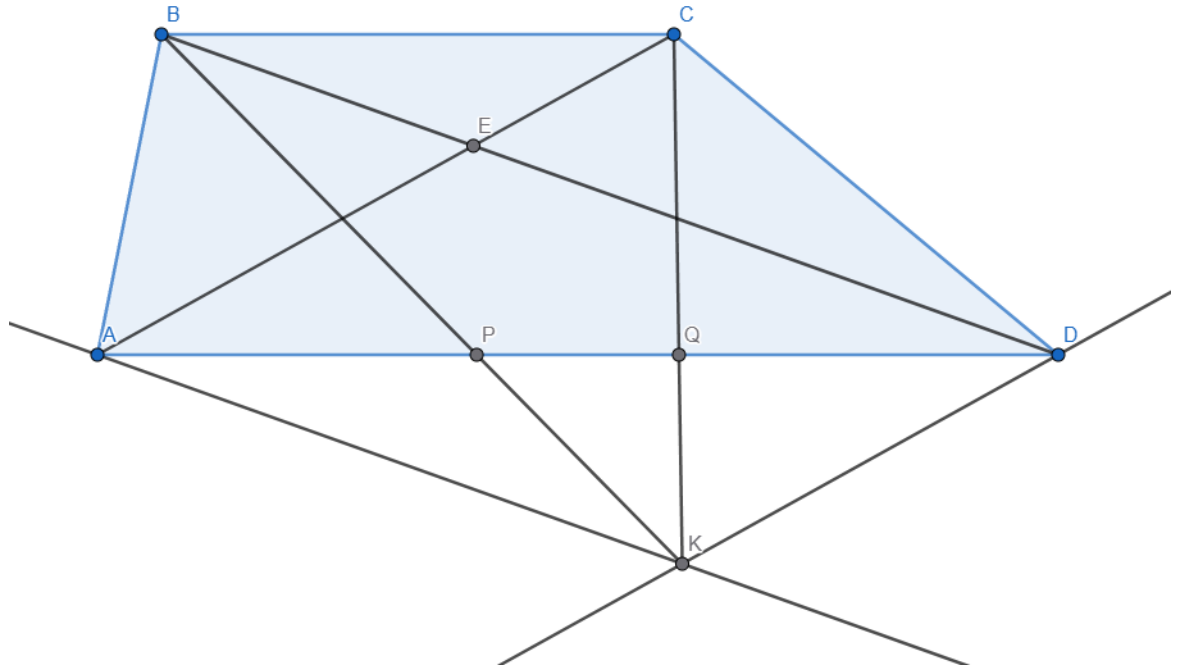
Б) Выберите **верный** ответ.

- 1) $AP > QP$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 2) $AP = QP$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 3) $AP < QP$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).
- 4) Сравнить длины отрезков AP и QP невозможно. Знак сравнения зависит от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$). (1 балл)

В) Докажите правильность своих ответов в пп. А и Б.

(4 балла)

РЕШЕНИЕ.



«Т1». $AP = QD$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$).

Докажем «Т1».

1) Пусть $AP = x$; $PQ = y$; $QD = z$.

2) Из подобия треугольников APK и DPB следует $\frac{BD}{AK} = \frac{y+z}{x}$, а из подобия треугольников KQD и CQA следует $\frac{AC}{KD} = \frac{x+y}{z}$.

3) Так как $AEDK$ – параллелограмм (по определению), то $DE = AK$ и $AE = DK$ по свойству параллелограмма.

4) Из пунктов 2 и 3 доказательства можно вывести, что $\frac{BE}{ED} = \frac{BD}{AK} - 1 = \frac{y+z-x}{x}$ и $\frac{CE}{EA} = \frac{AC}{KD} - 1 = \frac{x+y-z}{z}$.

5) Из подобия треугольников ADE и CBE следует $\frac{BE}{ED} = \frac{CE}{EA}$, откуда $\frac{y+z-x}{x} = \frac{x+y-z}{z}$.

6) Из $\frac{y+z-x}{x} = \frac{x+y-z}{z}$ выходит, что $(z-x)(x+y+z) = 0$, откуда $z = x$.

	«Т2». $AP > QP$ независимо от вида трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$; $AD > BC$). Докажем «Т2». 1) Заметим, что $AEDK$ – параллелограмм (по определению). $DE = AK$ по свойству параллелограмма. 2) Из подобия треугольников BCE и DAE и условия $AD > BC$ следует, что $ED = AK > BE$, откуда $\frac{1}{2}BD < AK$. 3) Из подобия треугольников APK и DPB и $\frac{1}{2}BD < AK$ следует, что $\frac{1}{2}PD < AP$. 4) В силу «Т1» из неравенства $\frac{1}{2}PD < AP$ следует $\frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}QD = \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}AP < AP$, откуда $PQ < AP$.
4	А) Игральный кубик бросали до тех пор, пока впервые не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что хотя бы раз при этом выпадала единица. (2 балла) Б) Игральный кубик бросали до тех пор, пока впервые не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что при этом единица выпадала хотя бы дважды. (1 балл) В) Игральный кубик бросали до тех пор, пока впервые не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что при этом единица выпадала ровно $n \in N$ раз. (2 балла) РЕШЕНИЕ. А) Представим бесконечное случайно сгенерированное число, состоящее только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. События «В записи числа первая единица появится раньше первой шестерки» и «В записи числа первая шестерка появится раньше первой единицы» равновероятны. ОТВЕТ: $\frac{1}{2}$ Б) Следуя логике из пункта А, первая единица появляется раньше первой шестерки с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда в этом случае (при этой гипотезе) вторая единица тоже окажется раньше первой шестерки тоже с вероятностью $\frac{1}{2}$. Итого $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ОТВЕТ: $\frac{1}{4}$ В) Обобщая задачу пункта Б, рассмотрим подмножество из $n + 1$ чисел: первая единица числа (при прочтении его десятичной записи слева направо), вторая по счёту единица, ..., n – ная по счёту единица и первая шестерка. В этом подмножестве важно, чтобы первая шестерка появилась позже n единиц. Вероятность этого события $\frac{1}{2^n}$. Назовем это событие «А». Теперь рассмотрим подмножество из $n + 2$ чисел: первая единица числа (при прочтении его десятичной записи слева направо), вторая по счёту единица, ..., $(n + 1)$ – я по счёту единица и первая шестерка. В этом подмножестве сделаем так, чтобы первая шестерка появилась позже $n + 1$ единиц. Вероятность этого события $\frac{1}{2^{n+1}}$. Назовем это событие «В». Так как все исходы, при которых выполняется событие «В», являются подмножеством множества благоприятных исходов события «А», то искомая вероятность $p(A \setminus B)$ равна $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ОТВЕТ: $\frac{1}{2^{n+1}}$

5	А) Петя записал на доске 21-значное число, составленное только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Верно ли, что Маша всегда сможет стереть несколько цифр Петиного числа (может не стирать ни одной), чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали число, делящееся на 7 без остатка? (4 балла) Б) Петя записал на доске 6-значное число, составленное только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Верно ли, что Маша всегда сможет стереть несколько цифр Петиного числа (может не стирать ни одной), чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали число, делящееся на 7 без остатка? (2 балла) РЕШЕНИЕ. А) 1) Число, составленное из 6 одинаковых цифр, гарантированно делится на 7 без остатка. Если какая-то цифра встретилась 6 раз – оставляем только эти шесть одинаковых цифр. 2) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то гарантированно в исходном 21-значном числе встретятся хотя бы пять различных цифр. 3) Заметим, что все числа из двух наборов {14; 42; 21} и {35; 56; 63} делятся на 7 без остатка. 4) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то среди хотя бы пяти различных цифр найдется хотя бы один полный набор цифр {1; 4; 2} ИЛИ {3; 5; 6}. 5) Не умаляя общности, пусть это будет набор {1; 4; 2}. Чтобы не получилось число 14, нужно, чтобы все четверки были раньше единиц, чтобы не получилось 42, нужно, чтобы все двойки были раньше четверок, но тогда все двойки стоят раньше единиц, то есть число 21 получить возможно. Аналогично, в прочих ситуациях. ОТВЕТ: ДА Б) Пусть Петя написал число 222223. Ни одно из возможных чисел: {2, 22, 222, 2222, 22222, 3, 23, 223, 2223, 22223, 222223} не кратно 7. ОТВЕТ: НЕТ
6	Прочитайте «задачу».

Концы A и B отрезка AB расположены в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Оказалось, что прямая AB наклонена к плоскости α под углом $\varphi = 37,5^\circ$, а к плоскости β - под углом $\theta = 54^\circ$. Найдите угол, образованный прямой AB и общей прямой плоскостей α и β .

А) Всё ли в условии этой «задачи» хорошо? Аргументируйте свой ответ.

(3 балла)

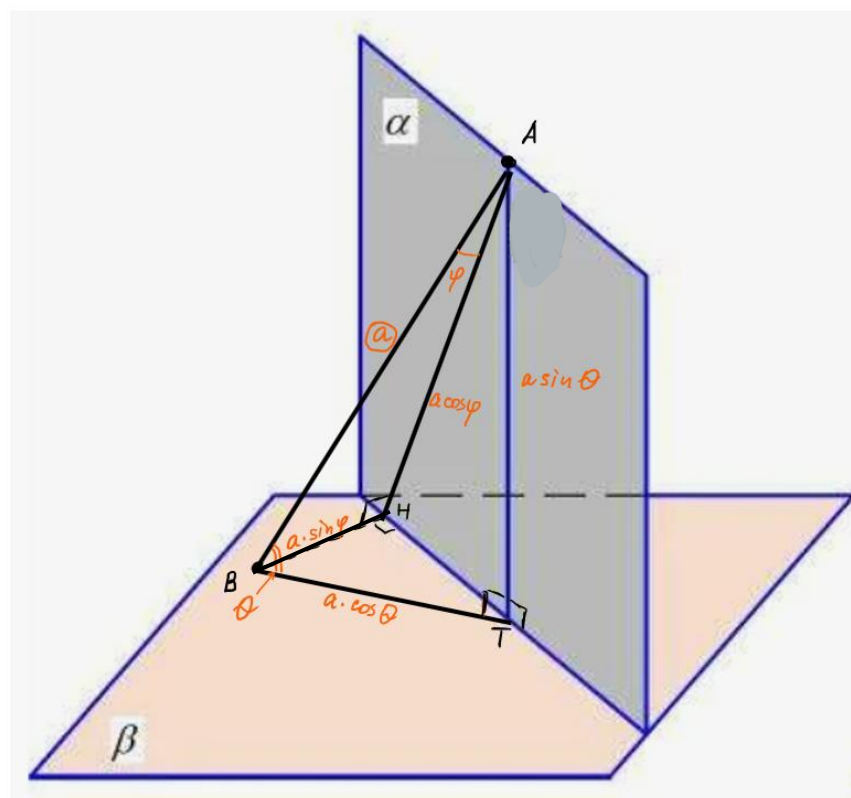
Б) Начертите в координатной плоскости $(\varphi O \theta)$ множество точек, для каждой из которых данная «задача» гарантированно будет корректно сформулированной.

(1 балл)

В) Решите задачу в общем виде: «Концы A и B отрезка AB расположены в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Оказалось, что прямая AB наклонена к плоскости α под углом φ , а к плоскости β - под углом θ . Найдите угол, образованный прямой AB и общей прямой плоскостей α и β .»

(2 балла)

РЕШЕНИЕ.

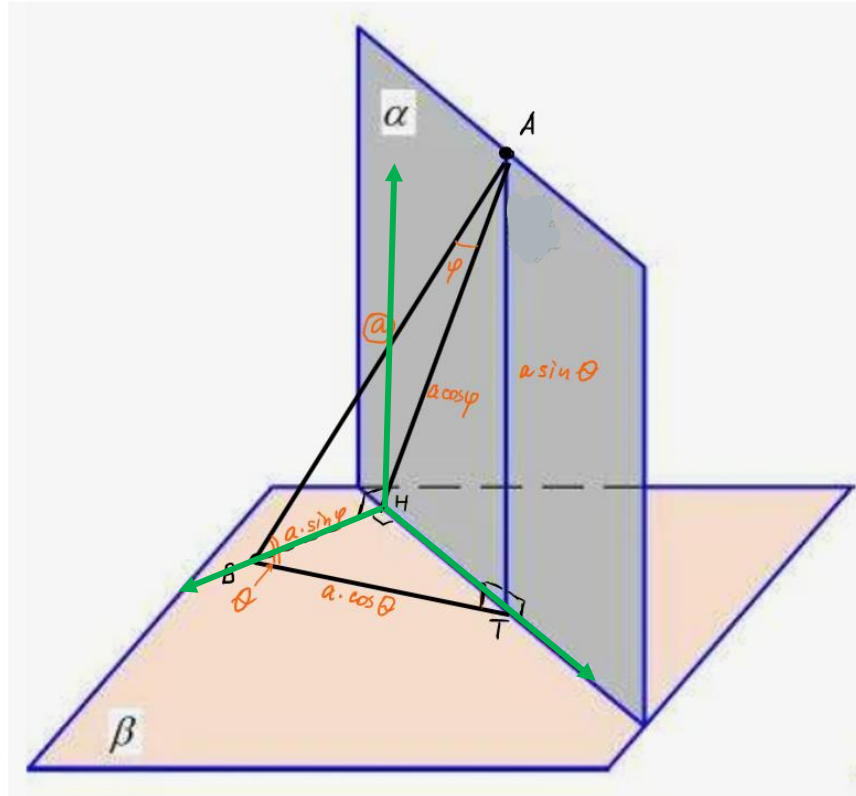


А и Б) Построим углы φ и θ по определению угла между прямой и плоскостью (см. рис.). Тогда в прямоугольных треугольниках BTH и ATH гипотенузы не могут быть меньше катетов. $\cos \theta \geq \sin \varphi$; $\cos \varphi \geq \sin \theta$. Откуда, $\sin(90^\circ - \theta) \geq \sin \varphi$; $\sin(90^\circ - \varphi) \geq \sin \theta$. Тогда $\varphi + \theta \leq 90^\circ$.

В условии «задачи» $\varphi + \theta = 91,5^\circ$. Противоречие. Задача некорректна.

Множеством точек $\begin{cases} \varphi + \theta \leq 90^\circ \\ \varphi \geq 0^\circ \\ \theta \geq 0^\circ \end{cases}$ будут граничные и внутренние точки прямоугольного треугольника, ограниченного координатными осями и прямой $\theta = 90 - \varphi$.

В) Решим задачу методом координат:



Пусть a – длина отрезка AB . В введенной системе координат определим координаты векторов $\vec{BA}$ и $\vec{HT}$.

$$\vec{BA} \{ -a \sin \varphi; a \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}; a \sin \theta \}; \vec{HT} \{ 0; a \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}; 0 \}$$

Пусть ω – искомый угол. Тогда $\cos \omega = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{HT}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{HT}|} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}$.

Ответ: $\omega = \arccos (\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi})$

7 Рассмотрим задачу 19 (пункт Б) из открытого банка задач ЕГЭ.

«Из правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{2a+b}{3a+b}$.

Можно ли за **два** таких хода из некоторой дроби получить дробь, **равную** $\frac{48}{65}$?»

Перед Вами представлены 4 различных «решения» этой задачи.

Если решение, на Ваш взгляд, принципиально верное, то напишите «**ВЕРНО**» и оцените решение одним баллом (согласно общеизвестным критериям ЕГЭ).

Если какие-то решения неверные – оцените их нулём и укажите **ВСЕ** существенные ошибки или пропуски в логике рассуждений в этих решениях, не позволяющие их назвать концептуально верными.

Решение №1:

$0 < a < b$

$$\frac{2a+b}{3a+b} = 1 - \frac{a}{3a+b} > 1 - \frac{a}{3a+a} = \frac{3}{4}$$

Какая бы ни была первая дробь, вторая точно станет больше $\frac{3}{4}$.
Тогда самое малое можно сказать о переходе от
второй дроби $\frac{a_1}{b_1}$ к третьей $\frac{2a_1+b_1}{3a_1+b_1}$.
— Для любой второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья точно будет
больше $\frac{3}{4}$.
Так как $\frac{48}{65} < \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$, то такое получить нельзя.

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как оно содержит высказывание: «Для любой второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья дробь будет тоже больше $\frac{3}{4}$ ». К примеру, из $\frac{7}{5}$ получится дробь $\frac{19}{26}$, меньшая $\frac{3}{4}$. По сути, ошибки нет, но нет и ни слова, что вторая дробь тоже правильная.

В решении этой задачи, выполненном исключительно с помощью оценочных неравенств, оказалось важно, чтобы была и оценка снизу, и оценка сверху. Оценкой снизу ученик пользовался, а оценку сверху, достаточно важную для исключения контрпримера, не привел.

Правильным было бы такое высказывание: «Для любой **правильной** второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья дробь будет тоже больше $\frac{3}{4}$ ». Оценивание такого решения – вещь субъективная (на взгляд автора задания, это 0 баллов).

Решение №2:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{13}{17} \quad (\times) \\ \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{6} \rightarrow \frac{16}{21} \quad (\times) \\ \frac{1}{4} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \frac{19}{25} \quad (\times) \end{array}$$

Закономерность: Числитель $\nearrow$ на 3, знаменатель $\nearrow$ на 4.

Разница чис: $\frac{48}{65}$ равна 17.

Тогда начинать надо от $\frac{1}{15} \rightarrow \frac{17}{18} \rightarrow \frac{51}{69}$ - перебор.

Ответ: не получится $\frac{48}{65}$

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как закономерность, найденная учеником, справедлива только для дробей, в числителе которых была единица. Решение сводится к анализу одного частного случая, что не соответствует требованию об общности доказательства невозможности получения дроби, равной $\frac{48}{65}$ ни из какой правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа. Такое решение однозначно оценивается нулём.

«Своеобразие» представления мыслей/аббревиатур ученика оставим без комментариев.

Решение №3:

$$\begin{array}{l} \frac{a}{b} - \text{было.} \\ \frac{2a+b}{3a+b} - \text{через 1 ход.} \\ \frac{2(2a+b) + (3a+b)}{3(2a+b) + (3a+b)} = \frac{7a+3b}{9a+4b} - \text{через 2 хода.} \\ \frac{7a+3b}{9a+4b} = \frac{48}{65} \\ \text{Потому что } \begin{cases} 7a+3b=48 \\ 9a+4b=65 \end{cases} \\ \begin{array}{l} 2a+b=17 \\ b=17-2a \end{array} \\ \text{Отсюда } 7a+3(17-2a)=48 \\ a=-3 \\ b=23. \\ \text{Числитель не был натуральным. Противоречие. Ответ: нельзя.} \end{array}$$

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как в условии задачи **требуется** получить дробь, **равную** $\frac{48}{65}$. Дроби $\frac{96}{130}$; $\frac{144}{195}$; ... тоже равны $\frac{48}{65}$. Систему уравнений ученика следовало бы

представить в виде
$$\begin{cases} 7a+3b=48n \\ 9a+4b=65n \\ a \in N; b \in N; n \in N \end{cases}$$
 И в этом случае нашлось бы противоречие такими

же рассуждениями, как у ученика. Тем не менее, рассмотрен лишь частный случай, а в решении нет ни слова о том, что все полученные дроби тоже будут несократимыми. Такое решение следует оценить нулём.

Решение №4:

Из дроби вида $\frac{a}{b}$ через 2 хода можно получить дробь $\frac{7a+3b}{9a+4b}$.

$$\text{НОД}(7a+3b, 9a+4b) = \text{НОД}(2a+b, 7a+3b) =$$

$$= \text{НОД}(a+b, 2a+b) = \text{НОД}(a, a+b) = \text{НОД}(a, b) = 1 \quad (\text{по условию})$$

Новая дробь ни на что не сокращается.

Решим в целых (натуральных) числах уравнение

$$7a+3b=48$$

$$\begin{matrix} 7a+3b=48 \\ :3 \quad :3 \end{matrix}$$

Тогда $a:3$

$a=3$. Тогда $b=9$ - не можем быть, т.к. $\frac{a}{b}$ несократима

$a=6$. Тогда $b=2$ - не можем быть, т.к. $\frac{a}{b}$ неправильная

$a \geq 9$ Тогда $b < 0$ - не можем быть, т.к. $a > 0$ и $b > 0$.

Ответ: нет

КОММЕНТАРИЙ:

ВЕРНО. 1 балл.

Задания финального тура с решениями.

№	Задания и решения
1	А) Может ли для каких-то трёх вещественных положительных чисел $x; y; z$ выполняться система уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,2 \end{cases}$? (3 балла) Б) Может ли для каких-то трёх вещественных положительных чисел $x; y; z$ выполняться система уравнений $\begin{cases} x + y + z = 3,6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,6 \end{cases}$? (3 балла) А) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \cdot (x + y + z) = 3 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = 8,8.$ $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = 5,8.$ Если все числа $x; y; z$ были положительными, то $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6$ так как модуль суммы двух обратных чисел не менее 2. Противоречие. ОТВЕТ: НЕТ Б) Пусть $x = 1,2 = \frac{6}{5}$. Тогда $\begin{cases} y + z = \frac{12}{5} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y+z}{yz} = \frac{53}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = \frac{12}{5} \\ yz = \frac{72}{53} \end{cases}$. Тогда y и z, если таковые существуют, будут корнями квадратного уравнения $m^2 - \frac{12}{5}m + \frac{72}{53} = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $\frac{144}{25} - \frac{288}{53} = 288\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{53}\right) > 0$. Свободный коэффициент этого приведенного квадратного уравнения также положителен, что говорит о наличии двух различных положительных корней этого уравнения. Тем самым, хотя бы одна такая тройка положительных чисел, удовлетворяющих системе, существует. ОТВЕТ: ДА
2	А) Игральный кубик бросали до тех пор, пока впервые не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что хотя бы раз при этом выпадала единица. (2 балла) Б) Два игральных кубика бросали одновременно до тех пор, пока хотя бы на одном из них не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что хотя бы раз при этом выпадала единица. (3 балла) В) Три игральных кубика бросали одновременно до тех пор, пока хотя бы на одном из них не выпала шестёрка. Найдите вероятность, что хотя бы раз при этом выпадала единица. (2 балла) РЕШЕНИЕ. А) Представим бесконечное случайно сгенерированное число, состоящее только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. События «В записи числа первая единица появится раньше первой шестерки» и «В записи числа первая шестерка появится раньше первой единицы» равновероятны. ОТВЕТ: $\frac{1}{2}$

Б) Пусть при бросании двух кубиков не выпала ни 1, ни 6. Вероятность этого события $\frac{4}{9}$. Пусть при бросании двух кубиков выпала хотя бы одна шестерка и не выпала единица. Вероятность этого события $\frac{1}{4}$.

Тогда вероятность, что единиц до первой выпавшей шестерки не появлялось, равна $\frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{20}$

Тогда искомая вероятность равна $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

ОТВЕТ: $\frac{11}{20}$

В) Пусть при бросании трех кубиков не выпала ни 1, ни 6. Вероятность этого события $\frac{8}{27}$. Пусть при бросании трех кубиков выпала хотя бы одна шестерка и не выпало ни одной единицы. Вероятность этого события $\frac{61}{216}$.

Тогда вероятность, что единиц до первой выпавшей шестерки не появлялось, равна $\frac{61}{216} + \frac{61}{216} \cdot \frac{8}{27} + \frac{61}{216} \cdot \frac{61}{216} \cdot \frac{8}{27} + \dots = \frac{61}{152}$

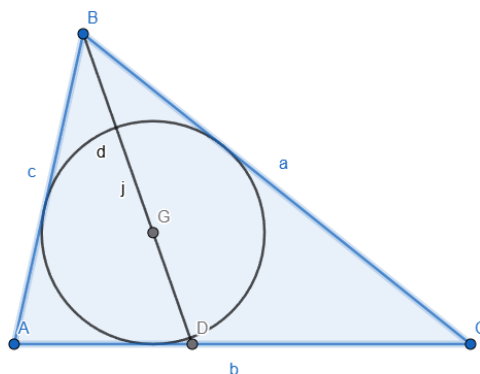
Тогда искомая вероятность равна $1 - \frac{61}{152} = \frac{91}{152}$

ОТВЕТ: $\frac{91}{152}$

3 А) G – центр вписанной окружности треугольника ABC . $BG \cap AC = D$.

Докажите, что $\frac{BG}{GD} = \frac{AB+BC}{AC}$ (см. рис.)

(4 балла)



Б) В треугольнике построили три биссектрисы. Одна из них поделилась в точке их пересечения в отношении 3: 2, считая от вершины, а другая – в отношении 4: 1, считая от вершины. В каком отношении, считая от вершины, поделится точкой пересечения биссектрис третья биссектриса этого треугольника?

(3 балла)

РЕШЕНИЕ.

А) Если провести вторую биссектрису AF , $F \in BC$, то можно применить теорему Менелая в треугольнике DBC .

$$\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$$

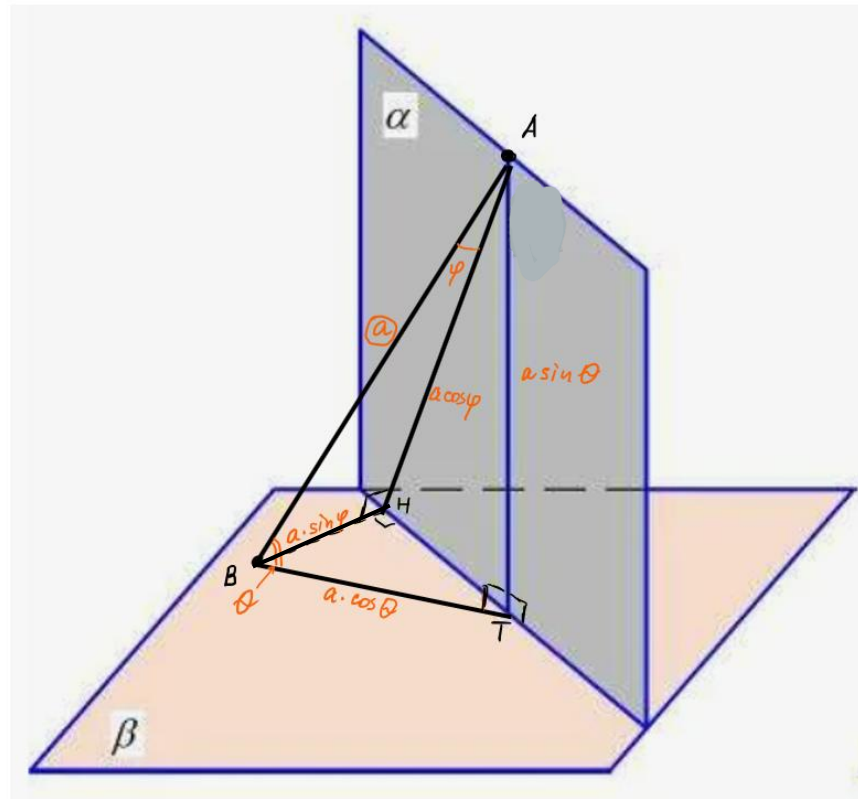
Заметим, что $\frac{CF}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$ (по свойству биссектрис треугольника).

Тогда $\frac{DA}{AC} = \frac{1}{1 + \frac{DC}{DA}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{c}{a+c}$.

	Откуда $\frac{BG}{GD} \cdot \frac{c}{a+c} \cdot \frac{b}{c} = 1$, что и даёт требуемое отношение $\frac{BG}{GD} = \frac{a+c}{b} = \frac{AB+BC}{AC}$. Б) Пусть первая биссектриса была проведена к стороне a, а вторая – к стороне b. Имеем систему: $\begin{cases} \frac{b+c}{a} = \frac{3}{2}, \\ \frac{a+c}{b} = \frac{4}{1} \end{cases}$, из которой следует, что $a = c = 2b$. Тогда треугольник равнобедренный с основанием b. Он имеет ось симметрии – высоту, проведенную к стороне b. В силу осевой симметрии, третья биссектриса поделится в точке пересечения, как и первая, в отношении 3: 2, считая от вершины. ОТВЕТ: 3: 2
4	А) На поле A1 (крайняя левая нижняя клетка) укрупненной шахматной доски размером 2024×2024 клетки стоит «королевский конь» - странная шахматная фигура, которая может ходить и как «король», и как «конь». За один ход игроку разрешается сделать один ход этой фигурой, но такой, что после этого хода фигура не может оказаться левее и/или ниже, чем была до этого. Петя и Вася по очереди делают ходы этой фигуркой. Кто сделает последний ход – тот и победитель. Начинает Петя. Есть ли у кого-то из ребят гарантированно выигрышная стратегия? Какая? (5 баллов) Б) Изменится ли потенциальный победитель/стратегия игры победителя, если в условии предыдущей задачи поменять только размер доски на 2025×2025 клеток? (2 балла) РЕШЕНИЕ. А) Побеждает Петя. Первым ходом он идет на поле B2. После этого Вася сможет сходить «королевским конём» на любое из пяти полей: B3; C2; C3; C4; D3. Как бы Вася ни сходил, после этого Петя гарантированно сможет поставить фигуру на поле D4. Далее – на F6, далее – на H8, тем самым, добираясь до крайней верхней правой клетки. Б) Побеждает Вася. Первым ходом Петя сможет сходить на любое из пяти полей: A2; B1; B2; B3; C2. После этого Вася сможет из любой Петиней позиции сходить «королевским конём» на поле C3. Как бы Петя ни ходил, Вася далее сможет поставить «королевского коня» – на E5, далее – на G7, тем самым, добираясь до крайней верхней правой клетки.
5	А) Петя записал на доске 21-значное число, составленное только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Верно ли, что Маша всегда сможет стереть несколько цифр Петиного числа (но не все), чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали число, делящееся на 7 без остатка? (4 балла) Б) Петя записал на доске 13-значное число, составленное только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Верно ли, что Маша всегда сможет стереть несколько цифр Петиного числа (но не все), чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали число, делящееся на 7 без остатка? (4 балла) РЕШЕНИЕ. А) 1) Число, составленное из 6 одинаковых цифр, гарантированно делится на 7 без остатка. Если какая-то цифра встретилась 6 раз – оставляем только эти шесть одинаковых цифр. 2) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то гарантированно в исходном 21-значном числе встретятся хотя бы пять различных цифр. 3) Заметим, что все числа из двух наборов {14; 42; 21} и {35; 56; 63} делятся на 7 без остатка. 4) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то среди хотя бы пяти различных цифр найдется хотя бы один полный набор цифр {1; 4; 2} ИЛИ {3; 5; 6}.

	5) Не умаляя общности, пусть это будет набор $\{1; 4; 2\}$. Чтобы не получилось число 14, нужно, чтобы все четверки были раньше единиц, чтобы не получилось 42, нужно, чтобы все двойки были раньше четверок, но тогда все двойки стоят раньше единиц, то есть число 21 получить возможно. Аналогично, в прочих ситуациях. ОТВЕТ: ДА Б) 1) Число, составленное из 6 одинаковых цифр, гарантированно делится на 7 без остатка. Если какая-то цифра встретилась 6 раз – оставляем только эти шесть одинаковых цифр. 2) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то гарантированно в исходном 13-значном числе встретятся хотя бы три различные цифры. 3) Заметим, что все числа из двух наборов $\{14; 441; 42; 224; 21; 112\}$ и $\{35; 553; 56; 665; 63; 336\}$ делятся на 7 без остатка. 4) Если никакая цифра не встретилась 6 раз, то среди хотя бы трех различных цифр исходного числа найдется хотя бы одна пара цифр наборов $\{1; 4\}; \{2; 4\}; \{1; 2\}$ ИЛИ наборов $\{3; 5\}; \{3; 6\}; \{5; 6\}$. Не умаляя общности, пусть это будет набор $\{1; 2\}$. 5) Чтобы невозможно было получить ни 21, ни 112, нужно, чтобы все единицы были записаны раньше двоек, а единица была бы только одна. Но если единица только одна и никакая цифра не встретилась 6 раз, то исходное число содержит уже как минимум 4 различные цифры. 6) Если различных цифр будет как минимум 5, то реализуется сценарий решения из п.А. 7) Если среди ровно четырёх исходных цифр числа, кроме $\{1; 2\}$, содержится $\{4\}$, то вновь реализуется сценарий решения из п.А. 8) Тогда среди ровно 4-х различных цифр исходного числа, кроме набора $\{1; 2\}$ будет, БОО, набор $\{5; 6\}$. Чтобы невозможно было получить ни 56, ни 665, нужно, чтобы все шестерки были записаны раньше пятёрок, а шестёрка была бы только одна. 9) Но если единица была только одна и шестёрка - только одна, и, вдобавок, никакая цифра не встретилась 6 раз, то исходное число содержит уже как минимум 5 различных цифр, что возвращает нас к решению из п.А. ОТВЕТ: ДА
6	Прочитайте «задачу». Концы A и B отрезка AB расположены в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Оказалось, что прямая AB наклонена к плоскости α под углом $\varphi = 37,5^\circ$, а к плоскости β - под углом $\theta = 54^\circ$. Найдите угол, образованный прямой AB и общей прямой плоскостей α и β. А) Всё ли в условии этой «задачи» хорошо? Аргументируйте свой ответ. (3 балла) Б) Если Вы считаете, что с условием «задачи» не всё в порядке, то предложите какую-то корректировку условия «задачи», чтобы она стала корректно сформулированной. (2 балла) В) Решите задачу в общем виде: «Концы A и B отрезка AB расположены в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Оказалось, что прямая AB наклонена к плоскости α под углом φ, а к плоскости β - под углом θ. Найдите угол, образованный прямой AB и общей прямой плоскостей α и β.» (3 балла)

РЕШЕНИЕ.

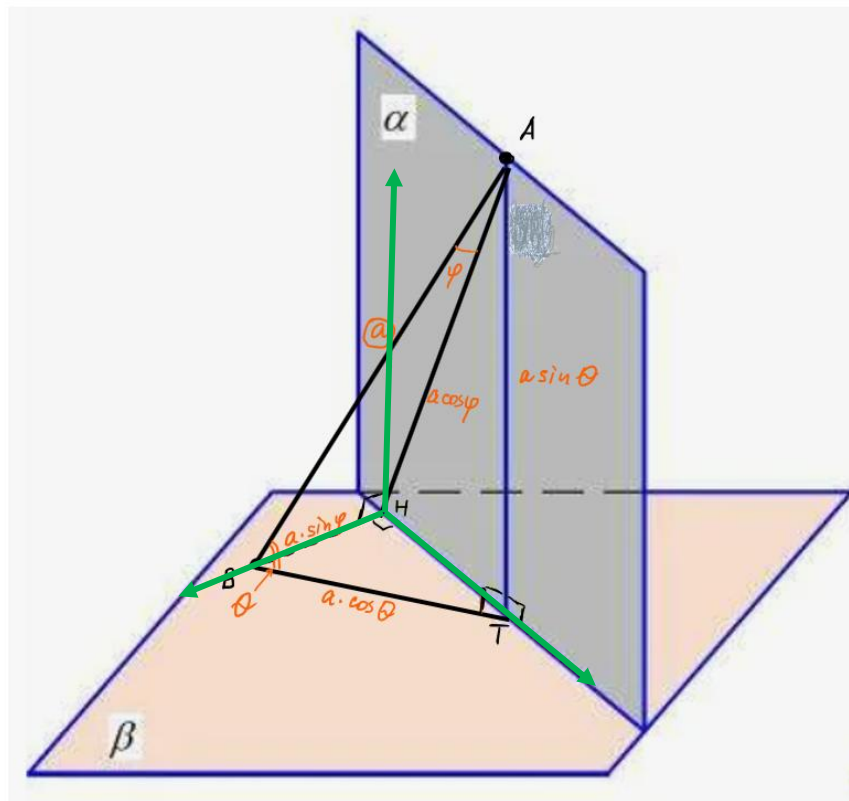


А и Б) Построим углы φ и θ по определению угла между прямой и плоскостью (см. рис.). Тогда в прямоугольных треугольниках BTH и AHT гипотенузы не могут быть меньше катетов. $\cos\theta \geq \sin\varphi$; $\cos\varphi \geq \sin\theta$. Откуда, $\sin(90^\circ - \theta) \geq \sin\varphi$; $\sin(90^\circ - \varphi) \geq \sin\theta$. Тогда $\varphi + \theta \leq 90^\circ$.

В условии «задачи» $\varphi + \theta = 91,5^\circ$. Противоречие. Задача некорректна.

Одна из возможных корректировок условия: “Концы A и B отрезка AB расположены в перпендикулярных плоскостях α и β соответственно. Оказалось, что прямая AB наклонена к плоскости α под углом $\varphi = 30^\circ$, а к плоскости β - под углом $\theta = 45^\circ$. Найдите угол, образованный прямой AB и общей прямой плоскостей α и β .”

В) Решим задачу методом координат:



Ограничения:
$$\begin{cases} \varphi + \theta \leq 90^\circ \\ \varphi \geq 0^\circ \\ \theta \geq 0^\circ \end{cases}$$

Пусть a – длина отрезка AB . В введенной системе координат определим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{HT}$.

$$\overrightarrow{BA} \{-a \sin \varphi; a \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}; a \sin \theta\}; \overrightarrow{HT} \{0; a \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}; 0\}$$

Пусть ω – искомый угол. Тогда $\cos \omega = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HT}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{HT}|} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}$.

Ответ: $\omega = \arccos(\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi})$

7 Рассмотрим задачу 19 (пункт Б) из открытого банка задач ЕГЭ.

«Из правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{2a+b}{3a+b}$.

Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь, равную $\frac{48}{65}$?»

Перед Вами представлены 4 различных «решения» этой задачи.

Если решение, на Ваш взгляд, принципиально верное, то напишите «**ВЕРНО**» и оцените решение одним баллом (согласно общеизвестным критериям ЕГЭ).

Если какие-то решения неверные – оцените их нулём и укажите **ВСЕ** существенные ошибки или пропуски в логике рассуждений в этих решениях, не позволяющие их назвать концептуально верными.

Решение №1:

$0 < a < b$
 $\frac{2a+b}{3a+b} = 1 - \frac{a}{3a+b} > 1 - \frac{a}{3a+a} = \frac{3}{4}$
 Какая бы ни была первая дробь, вторая точно станет больше $\frac{3}{4}$.
 То же самое можно сказать о переходе от второй дроби $\frac{a_1}{b_1}$ к третьей $\frac{2a_1+b_1}{3a_1+b_1}$.
 Для любой второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья тоже будет больше $\frac{3}{4}$.
 Так как $\frac{18}{65} < \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$, то такое правило нельзя.

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как оно содержит высказывание: «Для любой второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья дробь будет тоже больше $\frac{3}{4}$ ». К примеру, из $\frac{7}{5}$ получится дробь $\frac{19}{26}$, меньшая $\frac{3}{4}$. По сути, ошибки-то нет, но нет и ни слова, что вторая дробь тоже правильная.

В решении этой задачи, выполненном исключительно с помощью оценочных неравенств, оказалось важно, чтобы была и оценка снизу, и оценка сверху. Оценкой снизу ученик пользовался, а оценку сверху, достаточно важную для исключения контрпримера, не привел.

Правильным было бы такое высказывание: «Для любой **правильной** второй дроби, большей $\frac{3}{4}$, третья дробь будет тоже больше $\frac{3}{4}$ ». Оценивание такого решения – вещь субъективная (на взгляд автора задания, это 0 баллов).

Решение №2:

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{13}{17} \quad (\times)$
 $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{6} \rightarrow \frac{16}{21} \quad (\times)$
 $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \frac{19}{25} \quad (\times)$
 Закономерность: Числитель $\uparrow$ на 3, знаменатель $\uparrow$ на 4.
 Разница чис: $\frac{48}{65}$ равна 17.
 Тогда начинать надо от $\frac{1}{15} \rightarrow \frac{17}{18} \rightarrow \frac{52}{69}$ – перебор.
 Ответ: не получится $\frac{48}{65}$

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как закономерность, найденная учеником, справедлива только для дробей, в числителе которых была единица. Решение сводится к анализу одного частного случая, что не соответствует требованию об общности доказательства невозможности получения дроби, равной $\frac{48}{65}$ ни из какой правильной

несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа. Такое решение однозначно оценивается нулём.
«Своеобразность» представления мыслей/аббревиатур ученика оставим без комментариев.

Решение №3:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} & - \text{было.} \\ \frac{2a+b}{3a+b} & - \text{через 1 ход.} \\ \frac{2(2a+b) + (3a+b)}{3(2a+b) + (3a+b)} & = \frac{7a+3b}{9a+4b} - \text{через 2 хода.} \\ \frac{7a+3b}{9a+4b} & = \frac{48}{65} \\ \text{Итого: } \begin{cases} 7a+3b=48 \\ 9a+4b=65 \end{cases} \\ \underline{2a+b=17} \\ b & = 17-2a \\ \text{Откуда } 7a+51-6a & = 48 \\ a & = -3 \\ b & = 23. \\ \text{Исключитель не был натуральным.} \\ \text{Противоречие. Ответ: нельзя.} \end{aligned}$$

КОММЕНТАРИЙ:

Это решение нельзя назвать верным, так как в условии задачи **требуется** получить дробь, **равную** $\frac{48}{65}$. Дроби $\frac{96}{130}$; $\frac{144}{195}$; ... тоже равны $\frac{48}{65}$. Систему уравнений ученика следовало бы

представить в виде $\begin{cases} 7a+3b=48n \\ 9a+4b=65n \\ a \in N; b \in N; n \in N \end{cases}$ И в этом случае нашлось бы противоречие такими

же рассуждениями, как у ученика. Тем не менее, рассмотрен лишь частный случай, а в решении нет ни слова о том, что все полученные дроби тоже будут несократимыми. Такое решение следует оценить нулём.

Решение №4:

Из гроби вида $\frac{a}{b}$ чрез 2 года можно получить

гроби $\frac{7a+3b}{9a+4b}$



$$\cancel{404}(7a+3b, 9a+4b) = \cancel{404}(2a+b, 7a+3b) =$$

$$= \text{HQS}(\overbrace{a+b}^{\text{HQS}}, 2a+b) = \text{HQS}(\overbrace{a}^{\text{HQS}}, a+b) = \text{HQS}(a, b) = 1$$

Новая дробь не на что не сокращалась. (не делал)

Решим в целых (натуральных) числах уравнение

$$7a + \underbrace{36}_{:3} = \underbrace{48}_{:3}$$

Storga 4:3

$a=3$. Тодга $b=9$ - не можети бива, т.к. $\frac{a}{b}$ несократим
 $a=6$. Тодга $b=2$ - не можети бива, т.к. $\frac{a}{b}$ неправилен
 $a \geq 9$ Тодга $b < 0$ - не можети бива, т.к. $a > 0$ и $b > 0$.
 Отвѣт: нет

КОММЕНТАРИЙ:

ВЕРНО. 1 балл.