Подмосковная олимпиада учителей математики – 2024
Решения отборочного тура
Вариант 3

1. Выберите некорректную(ые) задачу(и):

А) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 часа, второй и третий – за 6 часов, первый и третий – за 9 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Б) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 часа, второй и третий – за 6 часов, первый и третий – за 11 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

В) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 часа, второй и третий – за 6 часов, первый и третий – за 13 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Г) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 часа, второй и третий – за 6 часов, первый и третий – за 15 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Д) Все задачи корректны.

Ответ: В; Г.

Решение.

Назовём $v_1; v_2; v_3 (\frac{\text{басс.}}{\text{ч}})$ – скорости заполнения бассейна первой, второй и третьей трубой соответственно.

В задаче «В» получается, что $v_1 + v_2 + 2v_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{13} = \frac{19}{78} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} = v_1 + v_2$.

Тогда $v_3 < 0$, что противоречит условию о том, что каждый насос **наполняет** бассейн, а не откачивает из него воду.

В задаче «Г» получается, что $v_1 + v_2 + 2v_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30} < \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = v_1 + v_2$.

Тогда $v_3 < 0$, что противоречит условию о том, что каждый насос **наполняет** бассейн, а не откачивает из него воду.

В задачах «А» и «Б» никаких противоречий не возникает.

2. Вероятность события «Стрелок поражает мишень каждым выстрелом» постоянна. Оказалось, что вероятность ровно одного попадания при двух выстрелах у этого стрелка равна 0,32. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах этим стрелком.

А) 0,36

Б) 0,48

В) 0,64

Г) 0,96

Д) 0,99

Ответ: А, Г.

Решение.

Назовём p вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле. Тогда имеем уравнение $2p(1-p) = 0{,}32 <=> \left[\begin{matrix} p=0{,}2 \\ p=0{,}8 \end{matrix}\right.$.

Событие А «Получено хотя бы одно попадание при двух выстрелах».

$p(A) = 2p(1-p) + p^2$; $\left[\begin{matrix} p(A)=0{,}36 \\ p(A)=0{,}96 \end{matrix}\right.$.

3. Найдите количество различных значений параметра p, для каждого из которых уравнение $px^3 + (p-1)x^2 - (2p+1)x + 2 = 0$ имеет 2 различных вещественных корня.

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 0

Д) Другой ответ

Ответ: В.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(x+2)(px-1) = 0$.

Два различных корня будут достигаться, если:

(1) Уравнение $px - 1 = 0$ не имеет вещественных корней вообще.

(2) Уравнение $px - 1 = 0$ имеет корень, равный 1 ИЛИ -2.

Гипотеза (1) выполнена при $p = 0$

Гипотеза (2) выполнена при $p = 1$ ИЛИ $p = -\frac{1}{2}$.

Итого нашлось три различных значения параметра p.

4. Точка L принадлежит стороне BC треугольника ABC. Оказалось, что прямая AL делит в точке O медиану BM треугольника ABC так, что $BO = OM$. Во сколько раз площадь треугольника AOM больше площади треугольника BOL.

А) 2

Б) 3

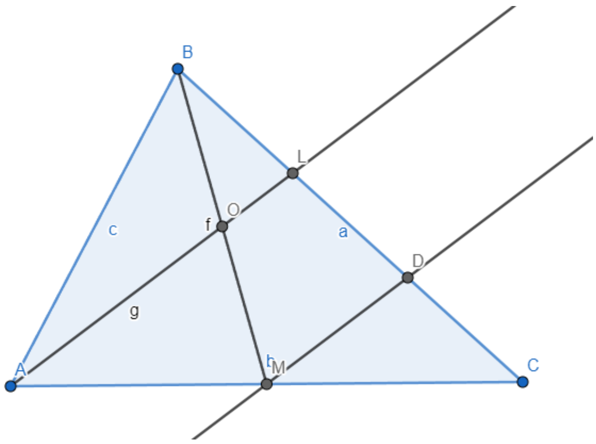
В) 4

Г) 6

Д) Другой ответ

Ответ: Б.

Решение.



Проведем $MD||OL$. Тогда OL – средняя линия треугольника BMD; MD – средняя линия треугольника ALC.

Приняв $OL = x$, имеем $MD = 2x$; $AL = 4x$; $AO = AL - OL = 3x$.

Пусть $BO = OM = y$.

$\widehat{BOL} = \widehat{AOM} = \varphi$ (как вертикальные углы)

$S_{\Delta BOL} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OL \cdot sin\widehat{BOL} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot sin\varphi$

$S_{\Delta AOM} = \frac{1}{2} \cdot MO \cdot OA \cdot sin\widehat{AOM} = \frac{3}{2} \cdot x \cdot y \cdot sin\varphi$

$S_{\Delta AOM} : S_{\Delta BOL} = 3$

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}(x+1)(y+2)(z-3)=0\\(x+2)(y+3)(z-1)=0\\(x+3)(y+1)(z-2)=0\end{cases}$?

Ответ: 6

Решение.

$$\begin{cases}(x+1)(y+2)(z-3)=0\\(x+2)(y+3)(z-1)=0\\(x+3)(y+1)(z-2)=0\end{cases} <=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\(y+3)(z-1)=0\\(y+1)(z-2)=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\(x+2)(z-1)=0\\(x+3)(z-2)=0\end{cases}\\ \begin{cases}z=3\\(x+2)(y+3)=0\\(x+3)(y+1)=0\end{cases}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\y=-3\\z=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\z=1\\y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\x=-2\\z=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=-2\\x=-3\\z=1\end{cases}\\ \begin{cases}z=3\\x=-3\\y=-3\end{cases}\\ \begin{cases}z=3\\x=-2\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Итого: 6 решений.

6. Имеется 4 корзины с шарами трёх цветов (белые, синие, красные). Оказалось, что

- в каждой корзине красных шаров столько же, сколько синих шаров во всех остальных корзинах;
- в каждой корзине синих шаров столько же, сколько белых шаров во всех остальных корзинах.

Найдите наименьшее общее количество шаров во всех четырёх корзинах, если известно, что их больше 2024?

Ответ: 2028

Решение.

Пусть a; b; c; d белых шаров в каждой корзине соответственно, тогда синих шаров в каждой корзине будет:

$b + c + d$; $a + c + d$; $a + b + d$; $a + b + c$.

Общее количество синих шаров будет $3(a + b + c + d)$, что втрое больше числа белых шаров.

Аналогично рассуждая, число красных шаров будет в 3 раза больше числа синих, иначе говоря, в 9 раз больше, чем белых.

Общее количество шаров будет равняться $13(a + b + c + d)$.

То есть, нам нужно найти наименьшее натуральное число, кратное 13 и превосходящее 2024. Это число 2028.

7. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$tg(x+2)\cdot ctg(2x+3)=1$. Ответ дайте в радианах и округлите до сотых, если возникнет такая необходимость. В случае отсутствия положительных корней уравнения напишите в ответе «0».

Ответ: 2,14

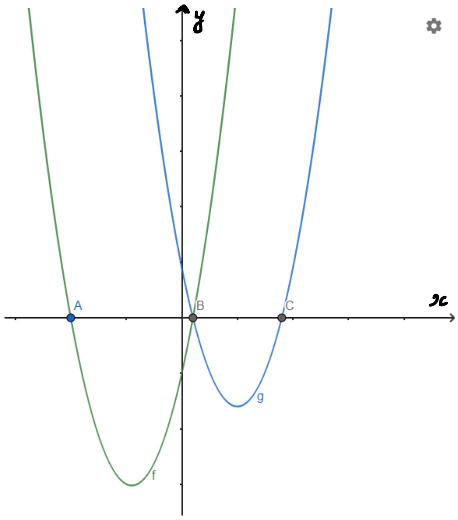
Решение.

$tg(x+2)\cdot ctg(2x+3)=1$

$$<=>\begin{cases} tg(x+2)=tg(2x+3) \\ x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ 2x+3\neq \pi m, m\in Z \end{cases} <=>\begin{cases} x+2=2x+3-\pi k, k\in Z \\ x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ 2x+3\neq \pi m, m\in Z \end{cases}$$

$<=>\begin{cases} x=\pi k-1, k\in Z \\ x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ x\neq \frac{\pi m}{2}-\frac{3}{2}, m\in Z \end{cases}$. При $k=1$ наименьшим положительным корнем уравнения будет $\pi-1\approx 2{,}14$.

8. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$. Известно, что абсцисса точки A равна -15, а точка B пересечения парабол лежит на оси абсцисс. Найдите абсциссу точки С.



Ответ: 14

Решение.

Абсцисса точки B определяется уравнением $x^2 + bx + c = x^2 + cx + b$, которое равносильно уравнению $(b - c)(x - 1) = 0$. Из рисунка видно, что параболы пересекают ось ординат в различных точках, то есть $b - c \neq 0$, откуда $x = 1$.

Тогда аналитическая запись функции, графиком которой является «зеленая» парабола, примет вид $y = (x + 15)(x - 1); y = x^2 + 14x - 15$, а функция, графиком которой будет «синяя» парабола, будет задана формулой

$$y = x^2 - 15x + 14; y = (x - 14)(x - 1).$$

Тем самым, абсцисса точки C равна 14.

9. Одна из граней тетраэдра окрашена в красный цвет. Все остальные – в белый. Изначально тетраэдр лежит на красной грани. Раз в секунду, начиная с 0,5 секунды, тетраэдр или с вероятностью $\frac{2}{3}$ остаётся на этой же грани, или с вероятностью $\frac{1}{3}$ случайным образом переворачивается на какую-то грань, отличную от текущей.

Назовем A_n событие «Через n секунд тетраэдр лежит на красной грани», $p(A_n)$ – вероятность этого события.

А) Найдите $p(A_3)$ *(1 балл)*

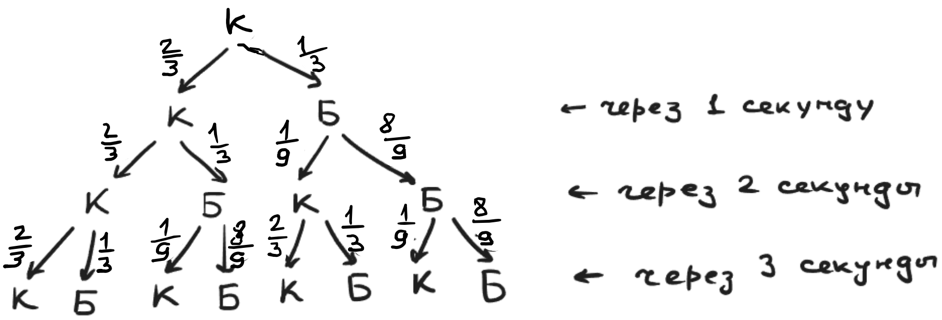
Б) Найдется ли натуральное n, для которого $p(A_n) < \frac{1}{4}$? *(3 балла)*

В) Верно ли, что последовательность $\{u_n\}: u_n = p(A_n)$ убывающая? *(1 балл)*

Ответ: А) $\frac{92}{243}$; Б) нет; В) да.

Решение.

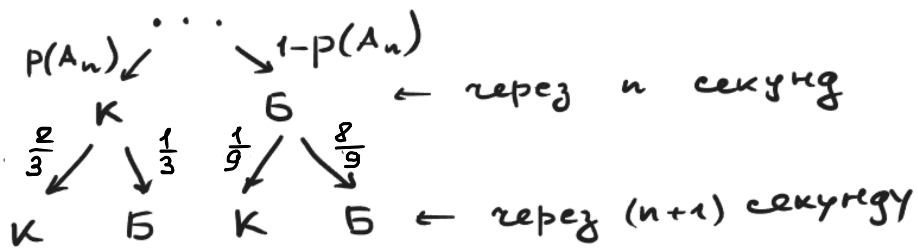
А) Составим граф-дерево, где буквой К обозначается, что тетраэдр лежит на красной грани, а буквой Б – тетраэдр лежит на белой грани.



$$p(A_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{27}+\frac{2}{81}+\frac{2}{81}+\frac{8}{243}=\frac{92}{243}$$

Б) Из графа-дерева (см. пункт «А») видно, что $p(A_1) > \frac{1}{4}$; $p(A_2) > \frac{1}{4}$; $p(A_3) > \frac{1}{4}$. Выставим гипотезу «Для любого натурального n справедливо неравенство $p(A_n) > \frac{1}{4}$.

Индукционный переход. Рассмотрим граф:



$p(A_{n+1}) = \frac{2}{3}p(A_n) + \frac{1}{9}\big(1 - p(A_n)\big) = \frac{5}{9}p(A_n) + \frac{1}{9}.$

Если для некоторого натурального k выполнено $p(A_k) > \frac{1}{4}$, то $\frac{5}{9}p(A_k) > \frac{5}{36}$, откуда $p(A_{k+1}) > \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$.

Гипотеза доказана.

Иными словами, не найдется ни одного натурального n, для которого $p(A_n) < \frac{1}{4}$.

В) Из формулы $p(A_{n+1}) = \frac{5}{9}p(A_n) + \frac{1}{9}$ следует, что

$p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9}p(A_n);$ из пункта «Б» верно неравенство $p(A_n) > \frac{1}{4}$.

Тогда $p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9}p(A_n) < \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = 0$, то есть для любого целого неотрицательного n верно, что $p(A_{n+1}) < p(A_n)$. Последовательность убывающая.

10. А) Существует ли треугольник, у которого радиус описанной окружности ровно в 3,25 раз больше радиуса вписанной окружности? *(1 балл)*

Б) Найдите $\inf\left(\frac{R}{r}\right)$ для всевозможных тупоугольных треугольников, где R – радиус описанной около треугольника окружности, r – радиус вписанной в треугольник окружности. *(4 балла)*

Ответ: А) да; Б) $1+\sqrt{2}$.

Решение.

А) Да. Рассмотрим прямоугольный треугольник со сторонами 5; 12; 13.

Для него $R=\frac{1}{2}\cdot 13=6{,}5\,; r=\frac{5+12-13}{2}=2;\ \frac{R}{r}=3{,}25.$

Б) Без ограничения общности, $a\le b<c$ – стороны тупоугольного треугольника.

Пусть φ – тупой угол.

Напомним, что для тупоугольных треугольников справедливо неравенство

$c^2>a^2+b^2$.

Тогда:

$$\frac{R}{r}=\frac{\left(\frac{c}{2sin\varphi}\right)}{\left(\frac{2S}{P}\right)}=\frac{c(a+b+c)}{2absin^2\varphi}>\frac{ca+cb+c^2}{2ab}>\frac{ca+cb+a^2+b^2}{2ab}=$$

$$=\frac{a(a+c)}{2ab}+\frac{b(b+c)}{2ab}=\frac{a+c}{2b}+\frac{b+c}{2a}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)>$$

$$>1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\ge$$

$$\ge 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=1+\sqrt{2}.$$

При $\frac{R}{r}=1+\sqrt{2}$ треугольник вырождается в прямоугольный равнобедренный. Если прямой угол увеличить на бесконечно малую величину $\varepsilon>0$, но оставить равнобедренным, то треугольник станет тупоугольным, а $\frac{R}{r}$ изменится в большую сторону на другую бесконечно малую положительную величину $f(\varepsilon)$. То есть, $\inf\left(\frac{R}{r}\right)=1+\sqrt{2}$.

P.S. Возможно решение с помощью формулы Эйлера расстояния d между центрами описанной и вписанной окружностей. $d^2=R^2-2Rr$.

В тупоугольных треугольниках центр описанной окружности лежит вне треугольника, откуда $d > r$.

Тогда $R^2 - 2Rr > r^2$, откуда $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\frac{R}{r} - 1 > 0$; $\frac{R}{r} > 1 + \sqrt{2}$. Далее – как в первом способе.

11. «Мы слишком часто даем детям ответы, которые надо выучить, а не ставим перед ними проблемы, которые надо решить». *Роджер Левин*.

Пожалуй, эта цитата лучше всего описывает **нездоровую** ситуацию в современном математическом школьном образовании. Большинство ребят не способны или не хотят самостоятельно работать с математическими текстами, уповая на то, что учитель и(или) репетитор все «разжует» и «расставит знания «по полочкам».

Прочитайте статью и ответьте на несколько методических вопросов по ней.

ШАРЫ И ПЕРЕГОРОДКИ.

Метод шаров и перегородок (англ. «stars» and «bars» — букв. «звёздочки и чёрточки») — это графический метод для вывода некоторых комбинаторных теорем. Метод популяризировал Уильям Феллер в его классической книге по теории вероятностей. Метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

Предположим, что имеется *n* объектов (которые представляются **шарами**, в примере ниже *n* = 7) нужно разместить в *k* ящиках таким образом, что все ящики должны содержать по меньшей мере один объект. Ящики различаются (скажем, они пронумерованы числами от 1 до *k*), но шары неразличимы (так что конфигурации различимы по *числу шаров*, находящихся в каждом ящике). Вместо размещения шаров в ящиках шары располагаются в линию:

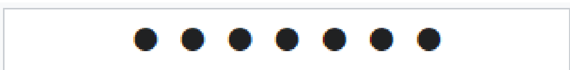


Рис. 1: семь объектов, представленных шарами

Пусть шары для первого ящика берутся слева, затем идут шары второго ящика и так далее. Таким образом, конфигурация определяется тем, какой начальный шар принадлежит первому ящику, какой первый (самый левый) шар принадлежит второму ящику и так далее. Можно отмечать это положение, помещая $k - 1$ разделяющих перегородок в некоторых местах между двумя шарами; а поскольку никакой ящик не может оказаться пустым, между двумя соседними шарами может быть не более одной перегородки:

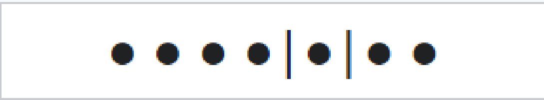


Рис. 2: две перегородки задают три ящика, содержащие 4, 1 и 2 объектов

Тогда n шаров как фиксированные объекты определяют $n-1$ промежутков между шарами, в каждый из которых можно поместить (или не поместить) одну перегородку. Нужно выбрать $k-1$ мест, в которых разместить перегородки, поэтому имеется

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

возможных конфигураций.

Ю. В. Курышова. Начала комбинаторики. *СУНЦ МГУ.* Дата обращения: 11 апреля 2018.

А) Придумайте для ребят хотя бы 2 вопроса на непосредственное извлечение или понимание/интерпретацию информации из этого текста. Напишите предполагаемые ответы на Ваши вопросы и критерии оценивания ответов. *(2 балла)*

Б) Придумайте для ребят 2 комбинаторные задачи, которые можно решить с использованием указанного в статье метода. Вторая задача должна быть **усилением** первой! Напишите условия и решения этих задач. *(3 балла)*

В) В статье указано, что исследуемый метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

Модифицируйте метод «шаров и перегородок» так, чтобы он мог быть использован для задач подсчёта вида: «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам, если в некоторых ящиках шаров могло не оказаться вообще?» Как изменится результирующая формула? Почему она именно так изменится? *(5 баллов)*

Решение.

А) Примеры вопросов (без ответов и критериев):

- Какого вида задачи можно решать с помощью метода «шаров и перегородок»?
- В чём заключается суть метода «шаров и перегородок» (в 1-3 предложениях)?
- Почему, если ящиков k, то перегородок только $k-1$? Почему, если ящиков n, то мест для выбора перегородок только $n-1$?
- Почему в конце статьи авторами была использована формула числа сочетаний, а не, к примеру, числа размещений?

*Вопросы могут быть иными.

Б) Примеры задач:

Задача 1. Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету?

Решение: $C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}=220$ способов.

Задача 2. Коля принес в школу 6 конфет «Птичье молоко» и 7 конфет «Кара-Кум» и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету каждого вида?

Решение: $C_{5}^{3}\cdot C_{6}^{3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=10\cdot 20=200$ способов.

*Задачи могут быть иными.

В) Новая формула примет вид:

$$C_{n+k-1}^{k-1}=\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

Для того, чтобы это понять, достаточно в каждый из k ящиков доложить по одному шару дополнительно к тем, которые уже были. То есть число перегородок не изменится, а число шаров увеличится на k, то есть число мест для перегородок станет равным $n+k-1$.

К примеру, решая задачу «Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если некоторые ребята могли не получить конфет вообще?» следует выдать каждому из 4-х мальчиков по одной «поощрительной» конфете, то есть распределять не 13, а 17 конфет.

Решение: $C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=\frac{14\cdot 15\cdot 16}{6}=560$ способов.

Критерии оценивания:

Задание 1	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 2	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 3	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 4	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 5	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 6	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 7	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 8	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 9	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
3	Верно выполнен пункт Б
1	Верно выполнен пункт В даже с недоказанной гипотезой из пункта Б
	Баллы суммируются. Максимальный балл 5.

Задание 10	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
4 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт Б Получен верный ответ в пункте Б без обоснования или с логическими и арифметическими ошибками в доказательстве.
	Баллы суммируются. Максимальный балл 5.

Задание 11	
Балл	Расшифровка
2 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт А Непосредственно к тексту статьи относятся только 2 или 3 вопроса ИЛИ даны только вопросы, но не даны ответы и(или) критерии оценивания
3 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт Б Даны 2 задачи с усилением без решений или с ошибочным решением ИЛИ Даны 2 задачи со всеми комментариями, но сюжет второй задачи не усиливает первую задачу.
5 ИЛИ 3	Верно выполнен пункт В Верно записана формула, но комментарии отсутствуют или недостаточны.
	Баллы суммируются. Максимальный балл 10.