

Подмосковная олимпиада учителей математики – 2024
Решения отборочного тура
Вариант 2

1. Выберите некорректную(ые) задачу(и):

А) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 12 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Б) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 20 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

В) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 28 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Г) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 36 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Д) Все задачи корректны.

Ответ: В; Г.

Решение.

Назовём $v_1; v_2; v_3$ ($\frac{\text{басс.}}{\text{ч}}$) – скорости заполнения бассейна первой, второй и третьей трубой соответственно.

В задаче «В» получается, что $v_1 + v_2 + 2v_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{28} = \frac{9}{56} < \frac{9}{54} = \frac{1}{6} = v_1 + v_2$.

Тогда $v_3 < 0$, что противоречит условию о том, что каждый насос **наполняет** бассейн, а не откачивает из него воду.

В задаче «Г» получается, что $v_1 + v_2 + 2v_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{36} = \frac{11}{72} < \frac{11}{66} = \frac{1}{6} = v_1 + v_2$.

Тогда $v_3 < 0$, что противоречит условию о том, что каждый насос **наполняет** бассейн, а не откачивает из него воду.

В задачах «А» и «Б» никаких противоречий не возникает.

2. Вероятность события «Стрелок поражает мишень каждым выстрелом» постоянна. Оказалось, что вероятность ровно одного попадания при двух выстрелах у этого стрелка равна 0,42. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах этим стрелком.

А) 0,51

Б) 0,61

В) 0,71

Г) 0,81

Д) 0,91

Ответ: А, Д.

Решение.

Назовём p вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле. Тогда имеем уравнение $2p(1 - p) = 0,42 \Leftrightarrow \begin{cases} p=0,3 \\ p=0,7 \end{cases}$.

Событие А «Получено хотя бы одно попадание при двух выстрелах».

$$p(A) = 2p(1 - p) + p^2; \begin{cases} p(A)=0,51 \\ p(A)=0,91 \end{cases}.$$

3. Найдите количество различных значений параметра p , для каждого из которых уравнение $px^3 - (4p + 1)x^2 + (3p + 4)x - 3 = 0$ имеет 2 различных вещественных корня.

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 0

Д) Другой ответ

Ответ: В.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 1)(x - 3)(px - 1) = 0$.

Два различных корня будут достигаться, если:

(1) Уравнение $px - 1 = 0$ не имеет вещественных корней вообще.

(2) Уравнение $px - 1 = 0$ имеет корень, равный 1 ИЛИ 3.

Гипотеза (1) выполнена при $p = 0$

Гипотеза (2) выполнена при $p = 1$ ИЛИ $p = \frac{1}{3}$.

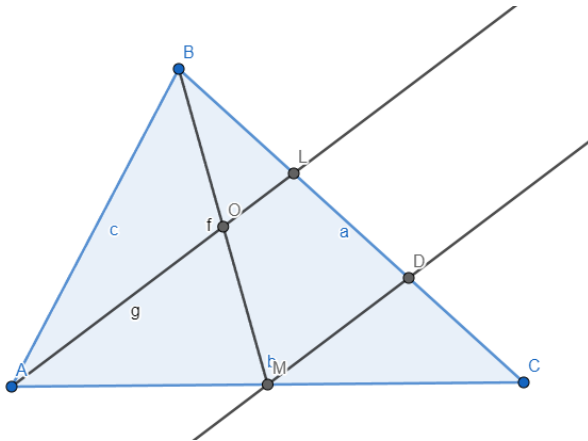
Итого нашлось три различных значения параметра p .

4. Точка L принадлежит стороне BC треугольника ABC . Оказалось, что прямая AL делит в точке O медиану BM треугольника ABC так, что $BO = OM$. Площадь треугольника ABC равна 24. Найдите площадь треугольника BOL .

- А) 1
- Б) 2
- В) 3
- Г) 4
- Д) Другой ответ

Ответ: Б.

Решение.



Проведем $MD \parallel OL$. Тогда OL – средняя линия треугольника BMD ; MD – средняя линия треугольника ALC , откуда $BL = \frac{1}{3}BC$.

$$S_{\Delta BAC} = 2S_{\Delta BMC} = 24 \text{ (медиана делит треугольник на два равновеликих)}$$

$$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin \widehat{MBC} = 12$$

$$S_{\Delta BOL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BM \cdot \frac{1}{3} BC \cdot \sin \widehat{MBC} = \frac{1}{6} S_{\Delta BMC} = 2$$

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} (x+1)(y+2)(z+3) = 0 \\ (x+2)(y+3)(z+1) = 0 \\ (x+3)(y+1)(z+2) = 0 \end{cases}$?

Ответ: 6

Решение.

$$\begin{cases} (x+1)(y+2)(z+3) = 0 \\ (x+2)(y+3)(z+1) = 0 \\ (x+3)(y+1)(z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ (y+3)(z+1) = 0 \\ (y+1)(z+2) = 0 \\ y = -2 \\ (x+2)(z+1) = 0 \\ (x+3)(z+2) = 0 \\ z = -3 \\ (x+2)(y+3) = 0 \\ (x+3)(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \\ x=-1 \\ z=-1 \\ y=-1 \\ y=-2 \\ x=-2 \\ z=-2 \\ y=-2 \\ x=-3 \\ z=-1 \\ z=-3 \\ x=-3 \\ y=-3 \\ z=-3 \\ x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Итого: 6 решений.

6. Имеется 5 корзин с шарами трёх цветов (белые, синие, красные). Оказалось, что

- в каждой корзине красных шаров столько же, сколько синих шаров во всех остальных корзинах;
- в каждой корзине синих шаров столько же, сколько белых шаров во всех остальных корзинах.

Найдите наименьшее общее количество шаров во всех пяти корзинах, если известно, что их больше 2024?

Ответ: 2037

Решение.

Пусть a ; b ; c ; d ; e белых шаров в каждой корзине соответственно, тогда синих шаров в каждой корзине будет:

$$b + c + d + e; a + c + d + e; a + b + d + e;$$

$$a + b + c + e; a + b + c + d.$$

Общее количество синих шаров будет $4(a + b + c + d + e)$, что вчетверо больше числа белых шаров.

Аналогично рассуждая, число красных шаров будет в 4 раза больше числа синих, иначе говоря, в 16 раз больше, чем белых.

Общее количество шаров будет равняться $21(a + b + c + d + e)$.

То есть, нам нужно найти наименьшее натуральное число, кратное 21 и превосходящее 2024. Это число 2037.

7. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$tg(x) \cdot ctg(2x + 3) = 1$. Ответ дайте в радианах и округлите до сотых, если возникнет такая необходимость. В случае отсутствия положительных корней уравнения напишите в ответе «0».

Ответ: 0,14

Решение.

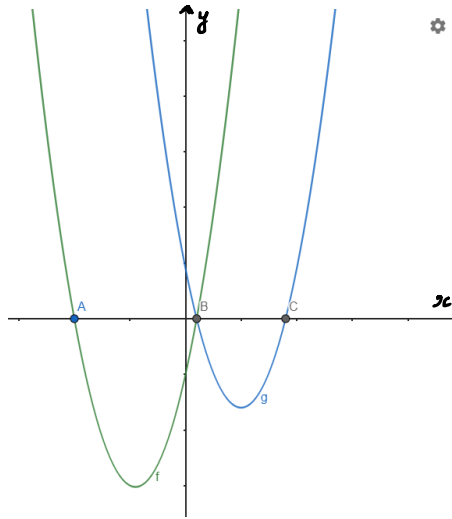
$$tg(x) \cdot ctg(2x + 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg(x) = tg(2x + 3) \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 2x + 3 \neq \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3 - \pi k, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 2x + 3 \neq \pi m, m \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k - 3, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x \neq \frac{\pi m}{2} - \frac{3}{2}, m \in Z \end{cases}. \text{ При } k = 1 \text{ наименьшим положительным корнем}$$

уравнения будет $\pi - 3 \approx 0,14$.

8. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$. Известно, что абсцисса точки A равна -20 , а точка B пересечения парабол лежит на оси абсцисс. Найдите абсциссу точки C .



Ответ: 19

Решение.

Абсцисса точки B определяется уравнением $x^2 + bx + c = x^2 + cx + b$, которое равносильно уравнению $(b - c)(x - 1) = 0$. Из рисунка видно, что параболы пересекают ось ординат в различных точках, то есть $b - c \neq 0$, откуда $x = 1$.

Тогда аналитическая запись функции, графиком которой является «зеленая» парабола, примет вид $y = (x + 20)(x - 1)$; $y = x^2 + 19x - 20$, а функция, графиком которой будет «синяя» парабола, будет задана формулой

$$y = x^2 - 20x + 19; y = (x - 19)(x - 1).$$

Тем самым, абсцисса точки C равна 19.

9. Одна из граней тетраэдра окрашена в красный цвет. Все остальные – в белый. Изначально тетраэдр лежит на красной грани. Раз в секунду, начиная с 0,5 секунды, тетраэдр или с вероятностью $\frac{1}{2}$ остаётся на этой же грани, или с вероятностью $\frac{1}{2}$ случайным образом переворачивается на какую-то грань, отличную от текущей.

Назовем A_n событие «Через n секунд тетраэдр лежит на красной грани», $p(A_n)$ – вероятность этого события.

А) Найдите $p(A_3)$ (1 балл)

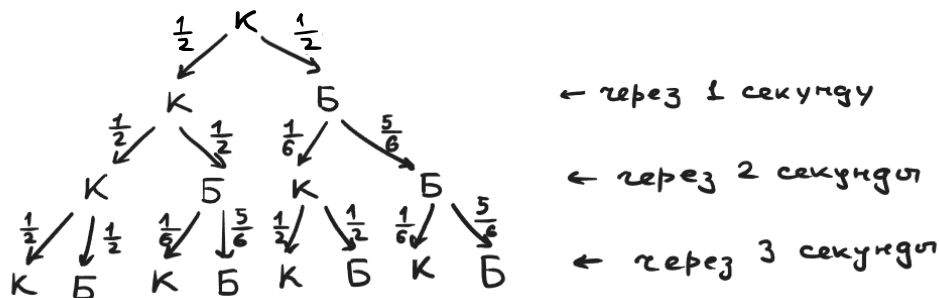
Б) Найдется ли натуральное n , для которого $p(A_n) < \frac{1}{4}$? (3 балла)

В) Верно ли, что последовательность $\{u_n\}: u_n = p(A_n)$ убывающая? (1 балл)

Ответ: А) $\frac{5}{18}$; Б) нет; В) да.

Решение.

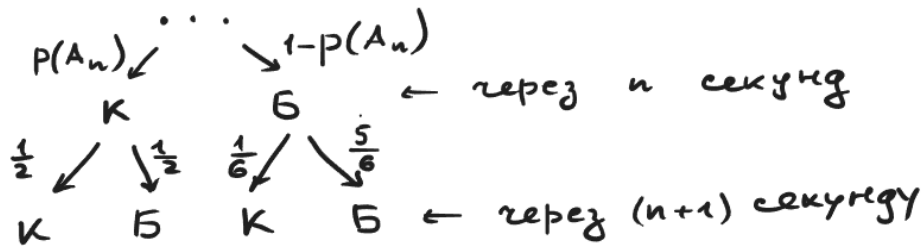
А) Составим граф-дерево, где буквой К обозначается, что тетраэдр лежит на красной грани, а буквой Б – тетраэдр лежит на белой грани.



$$p(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{5}{72} = \frac{5}{18}$$

Б) Из графа-дерева (см. пункт «А») видно, что $p(A_1) > \frac{1}{4}$; $p(A_2) > \frac{1}{4}$; $p(A_3) > \frac{1}{4}$. Выставим гипотезу «Для любого натурального n справедливо неравенство $p(A_n) > \frac{1}{4}$ ».

Индукционный переход. Рассмотрим граф:



$$p(A_{n+1}) = \frac{1}{2}p(A_n) + \frac{1}{6}(1 - p(A_n)) = \frac{1}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}.$$

Если для некоторого натурального k выполнено $p(A_k) > \frac{1}{4}$, то $\frac{1}{3}p(A_k) > \frac{1}{12}$, откуда

$$p(A_{k+1}) > \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Гипотеза доказана.

Иными словами, не найдется ни одного натурального n , для которого $p(A_n) < \frac{1}{4}$.

В) Из формулы $p(A_{n+1}) = \frac{1}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}$ следует, что

$$p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}p(A_n); \text{ из пункта «Б» верно неравенство } p(A_n) > \frac{1}{4}.$$

Тогда $p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}p(A_n) < \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0$, то есть для любого целого неотрицательного n верно, что $p(A_{n+1}) < p(A_n)$. Последовательность убывающая.

10. А) Существует ли треугольник, у которого радиус описанной окружности ровно в 2 раза больше радиуса вписанной окружности? (1 балл)

Б) Найдите $\inf\left(\frac{R}{r}\right)$ для всевозможных тупоугольных треугольников, где R – радиус описанной около треугольника окружности, r – радиус вписанной в треугольник окружности. (4 балла)

Ответ: А) да; Б) $1 + \sqrt{2}$.

Решение.

А) Да. Рассмотрим правильный треугольник, высота которого равна h .

Для него $R = \frac{2}{3}h$; $r = \frac{1}{3}h$; $\frac{R}{r} = 2$.

Б) Без ограничения общности, $a \leq b < c$ – стороны тупоугольного треугольника.

Пусть φ – тупой угол.

Напомним, что для тупоугольных треугольников справедливо неравенство

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \frac{\left(\frac{c}{2\sin\varphi}\right)}{\left(\frac{2S}{P}\right)} = \frac{c(a+b+c)}{2ab\sin^2\varphi} > \frac{ca+cb+c^2}{2ab} > \frac{ca+cb+a^2+b^2}{2ab} = \\ &= \frac{a(a+c)}{2ab} + \frac{b(b+c)}{2ab} = \frac{a+c}{2b} + \frac{b+c}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

При $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$ треугольник вырождается в прямоугольный равнобедренный.

Если прямой угол увеличить на бесконечно малую величину $\varepsilon > 0$, но оставить равнобедренным, то треугольник станет тупоугольным, а $\frac{R}{r}$ изменится в большую сторону на другую бесконечно малую положительную величину $f(\varepsilon)$. То есть, $\inf\left(\frac{R}{r}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

P.S. Возможно решение с помощью формулы Эйлера расстояния d между центрами описанной и вписанной окружностей. $d^2 = R^2 - 2Rr$.

В тупоугольных треугольниках центр описанной окружности лежит вне треугольника, откуда $d > r$.

Тогда $R^2 - 2Rr > r^2$, откуда $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\frac{R}{r} - 1 > 0$; $\frac{R}{r} > 1 + \sqrt{2}$. Далее – как в первом способе.

11. «Мы слишком часто даем детям ответы, которые надо выучить, а не ставим перед ними проблемы, которые надо решить». *Роджер Левин.*

Пожалуй, эта цитата лучше всего описывает **нездоровую** ситуацию в современном математическом школьном образовании. Большинство ребят не способны или не хотят самостоятельно работать с математическими текстами, уповая на то, что учитель и(или) репетитор все «разжует» и «расставит знания «по полочкам».

Прочитайте статью и ответьте на несколько методических вопросов по ней.

ШАРЫ И ПЕРЕГОРОДКИ.

Метод шаров и перегородок (англ. «stars» and «bars» — букв. «звёздочки и чёрточки») — это графический метод для вывода некоторых комбинаторных теорем. Метод популяризировал Уильям Феллер в его классической книге по теории вероятностей. Метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различным ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

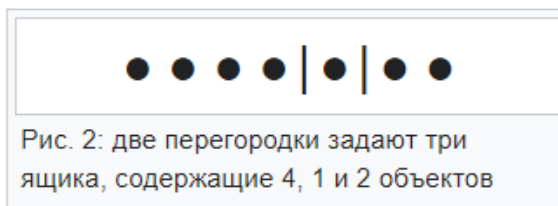
Предположим, что имеется n объектов (которые представляются **шарами**, в примере ниже $n = 7$) нужно разместить в k ящиках таким образом, что все ящики должны содержать по меньшей мере один объект. Ящики различаются (скажем, они пронумерованы числами от 1 до k), но шары неразличимы (так что конфигурации различимы по *числу шаров*, находящихся в каждом ящике). Вместо размещения шаров в ящиках шары располагаются в линию:



Рис. 1: семь объектов, представленных шарами

Пусть шары для первого ящика берутся слева, затем идут шары второго ящика и так далее. Таким образом, конфигурация определяется тем, какой начальный шар принадлежит первому ящику, какой первый (самый левый) шар принадлежит второму ящику и так далее. Можно отмечать это положение, помещая $k - 1$ разделяющих перегородок в некоторых местах между двумя

шарами; а поскольку никакой ящик не может оказаться пустым, между двумя соседними шарами может быть не более одной перегородки:



Тогда n шаров как фиксированные объекты определяют $n - 1$ промежутков между шарами, в каждый из которых можно поместить (или не поместить) одну перегородку. Нужно выбрать $k - 1$ мест, в которых разместить перегородки, поэтому имеется

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

возможных конфигураций.

Ю. В. Курышова. Начала комбинаторики СУНЦ МГУ. Дата обращения: 11 апреля 2018.

А) Придумайте для ребят хотя бы 4 вопроса на непосредственное извлечение или понимание/интерпретацию информации из этого текста. Напишите предполагаемые ответы на Ваши вопросы и критерии оценивания ответов. (2 балла)

Б) Придумайте для ребят 2 комбинаторные задачи, которые можно решить с использованием указанного в статье метода. Вторая задача должна быть **усилением** первой! Напишите условия и решения этих задач. (3 балла)

В) В статье указано, что исследуемый метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

Модифицируйте метод «шаров и перегородок» так, чтобы он мог быть использован для задач подсчёта вида: «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам, если в некоторых ящиках шаров могло не оказаться вообще?» Как изменится результирующая формула? Почему она именно так изменится? (5 баллов)

Решение.

А) Примеры вопросов:

- Какого вида задачи можно решать с помощью метода «шаров и перегородок»?
- В чём заключается суть метода «шаров и перегородок» (в 1-3 предложениях)?
- Почему, если ящиков k , то перегородок только $k - 1$? Почему, если ящиков n , то мест для выбора перегородок только $n - 1$?
- Почему в конце статьи авторами была использована формула числа сочетаний, а не, к примеру, числа размещений?

*Вопросы могут быть иными.

Б) Примеры задач:

Задача 1. Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету?

Решение: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220$ способов.

Задача 2. Коля принес в школу 6 конфет «Птичье молоко» и 7 конфет «Кара-Кум» и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету каждого вида?

Решение: $C_5^3 \cdot C_6^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 10 \cdot 20 = 200$ способов.

*Задачи могут быть иными.

В) Новая формула примет вид:

$$C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! (k-1)!}$$

Для того, чтобы это понять, достаточно в каждый из k ящиков доложить по одному шару дополнительно к тем, которые уже были. То есть число перегородок не изменится, а число шаров увеличится на k , то есть число мест для перегородок станет равным $n + k - 1$.

К примеру, решая задачу «Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если некоторые ребята могли не получить конфет вообще?» следует выдать каждому из 4-х мальчиков по одной «поощрительной» конфете, то есть распределять не 13, а 17 конфет.

Решение: $C_{16}^3 = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{6} = 560$ способов.

Критерии оценивания:

Задание 1	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 2	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 3	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 4	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 5	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 6	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 7	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 8	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 9	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
3	Верно выполнен пункт Б
1	Верно выполнен пункт В даже с недоказанной гипотезой из пункта Б
<i>Баллы суммируются. Максимальный балл 5.</i>	

Задание 10	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
4 ИЛИ	Верно выполнен пункт Б
1	Получен верный ответ в пункте Б без обоснования или с логическими и арифметическими ошибками в доказательстве.
<i>Баллы суммируются. Максимальный балл 5.</i>	

Задание 11	
Балл	Расшифровка
2 ИЛИ	Верно выполнен пункт А
1	Непосредственно к тексту статьи относятся только 2 или 3 вопроса ИЛИ даны только вопросы, но не даны ответы и(или) критерии оценивания
3 ИЛИ	Верно выполнен пункт Б
1	Даны 2 задачи с усилением без решений или с ошибочным решением ИЛИ Даны 2 задачи со всеми комментариями, но сюжет второй задачи не усиливает первую задачу.
5 ИЛИ	Верно выполнен пункт В
3	Верно записана формула, но комментарии отсутствуют или недостаточны.
<i>Баллы суммируются. Максимальный балл 10.</i>	