Подмосковная олимпиада учителей математики – 2024
Решения отборочного тура
Вариант 1

1. Выберите некорректную(ые) задачу(и):

А) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 10 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 24 часа. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Б) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 10 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 32 часа. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

В) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 10 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 36 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Г) Три гидронасоса наполняют бассейн. Первый и второй насосы, работая одновременно, заполняют бассейн за 10 часов, второй и третий – за 8 часов, первый и третий – за 48 часов. За какое время наполнят этот бассейн все три насоса, работая одновременно?

Д) Все задачи корректны.

Ответ: Г.

Решение.

Назовём $v_1; v_2; v_3 (\frac{\text{басс.}}{\text{ч}})$ – скорости заполнения бассейна первой, второй и третьей трубой соответственно.

В задаче «Г» получается, что $2v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{48} = \frac{29}{240} < \frac{30}{240} = \frac{1}{8} = v_2 + v_3$.

Тогда $v_1 < 0$, что противоречит условию о том, что каждый насос **наполняет** бассейн, а не откачивает из него воду.

В задачах «А-В» никаких противоречий не возникает.

2. Вероятность события «Стрелок поражает мишень каждым выстрелом» постоянна. Оказалось, что вероятность ровно одного попадания при двух выстрелах у этого стрелка равна 0,48. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах этим стрелком.

А) 0,84

Б) 0,64

В) 0,75

Г) 0,74

Д) 0,6

Ответ: А, Б.

Решение.

Назовём p вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле. Тогда имеем уравнение $2p(1-p) = 0{,}48 <=> \left[\begin{matrix} p=0{,}4 \\ p=0{,}6 \end{matrix}\right.$.

Событие А «Получено хотя бы одно попадание при двух выстрелах».

$p(A) = 2p(1-p) + p^2$; $\left[\begin{matrix} p(A)=0{,}64 \\ p(A)=0{,}84 \end{matrix}\right.$.

3. Найдите количество различных значений параметра p, для каждого из которых уравнение $px^3 - (3p+1)x^2 + (2p+3)x - 2 = 0$ имеет 2 различных вещественных корня.

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 0

Д) Другой ответ

Ответ: В.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(x-2)(px-1) = 0$.

Два различных корня будут достигаться, если:

(1) Уравнение $px - 1 = 0$ не имеет вещественных корней вообще.

(2) Уравнение $px - 1 = 0$ имеет корень, равный 1 ИЛИ 2.

Гипотеза (1) выполнена при $p = 0$

Гипотеза (2) выполнена при $p = 1$ ИЛИ $p = \frac{1}{2}$.

Итого нашлось три различных значения параметра p.

4. Точка L принадлежит стороне BC треугольника ABC. Оказалось, что прямая AL делит в точке O медиану BM треугольника ABC так, что $BO = OM$. Площадь треугольника BOL равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

А) 8

Б) 9

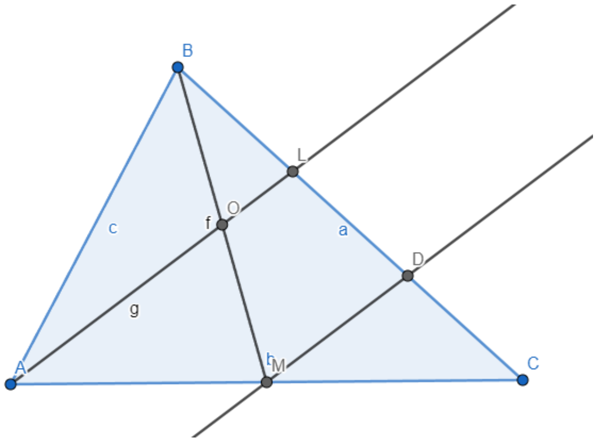
В) 12

Г) 16

Д) Другой ответ

Ответ: В.

Решение.



Проведем $MD||OL$. Тогда OL – средняя линия треугольника BMD; MD – средняя линия треугольника ALC, откуда $BL = \frac{1}{3}BC$.

$S_{\Delta BOL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BM \cdot \frac{1}{3}BC \cdot sin\widehat{MBC} = 1$

$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot sin\widehat{MBC} = 6S_{\Delta BOL} = 6$

$S_{\Delta BAC} = 2S_{\Delta BMC} = 12$ *(медиана делит треугольник на два равновеликих)*

5. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}(x-1)(y-2)(z-3)=0\\(x-2)(y-3)(z-1)=0\\(x-3)(y-1)(z-2)=0\end{cases}$?

Ответ: 6

Решение.

$$\begin{cases}(x-1)(y-2)(z-3)=0\\(x-2)(y-3)(z-1)=0\\(x-3)(y-1)(z-2)=0\end{cases} <=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\(y-3)(z-1)=0\\(y-1)(z-2)=0\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\(x-2)(z-1)=0\\(x-3)(z-2)=0\end{cases}\\\begin{cases}z=3\\(x-2)(y-3)=0\\(x-3)(y-1)=0\end{cases}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=3\\z=2\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\z=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\x=2\\z=2\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\x=3\\z=1\end{cases}\\\begin{cases}z=3\\x=3\\y=3\end{cases}\\\begin{cases}z=3\\x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Итого: 6 решений.

6. Имеется 6 корзин с шарами трёх цветов (белые, синие, красные). Оказалось, что

- в каждой корзине красных шаров столько же, сколько синих шаров во всех остальных корзинах;
- в каждой корзине синих шаров столько же, сколько белых шаров во всех остальных корзинах.

Найдите наименьшее общее количество шаров во всех шести корзинах, если известно, что их больше 2024?

Ответ: 2046

Решение.

Пусть a; b; c; d; e; f белых шаров в каждой корзине соответственно, тогда синих шаров в каждой корзине будет:

$b+c+d+e+f$; $a+c+d+e+f$; $a+b+d+e+f$;

$a+b+c+e+f$; $a+b+c+d+f$; $a+b+c+d+e$.

Общее количество синих шаров будет $5(a+b+c+d+e+f)$, что впятеро больше числа белых шаров.

Аналогично рассуждая, число красных шаров будет в 5 раз больше числа синих, иначе говоря, в 25 раз больше, чем белых.

Общее количество шаров будет равняться $31(a+b+c+d+e+f)$.

То есть, нам нужно найти наименьшее натуральное число, кратное 31 и превосходящее 2024. Это число 2046.

7. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$tg(x+1)\cdot ctg(2x+3)=1$. Ответ дайте в радианах и округлите до сотых, если возникнет такая необходимость. В случае отсутствия положительных корней уравнения напишите в ответе «0».

Ответ: 1,14

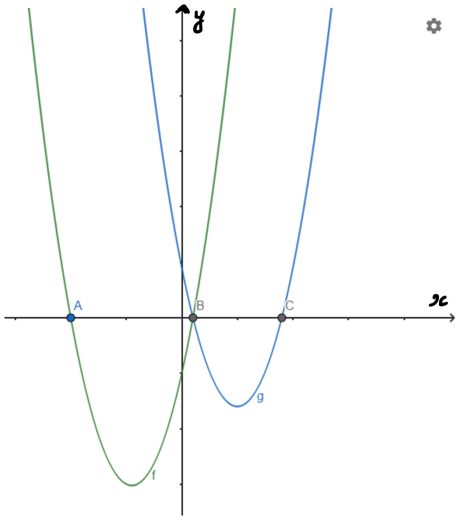
Решение.

$tg(x+1)\cdot ctg(2x+3)=1$

$$<=>\begin{cases} tg(x+1)=tg(2x+3) \\ x+1\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ 2x+3\neq \pi m, m\in Z \end{cases} <=>\begin{cases} x+1=2x+3-\pi k, k\in Z \\ x+1\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ 2x+3\neq \pi m, m\in Z \end{cases}$$

$<=>\begin{cases} x=\pi k-2, k\in Z \\ x\neq \frac{\pi}{2}-1+\pi n, n\in Z \\ x\neq \frac{\pi m}{2}-\frac{3}{2}, m\in Z \end{cases}$. При $k=1$ наименьшим положительным корнем уравнения будет $\pi-2\approx 1{,}14$.

8. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$. Известно, что абсцисса точки A равна -10, а точка B пересечения парабол лежит на оси абсцисс. Найдите абсциссу точки С.



Ответ: 9

Решение.

Абсцисса точки B определяется уравнением $x^2 + bx + c = x^2 + cx + b$, которое равносильно уравнению $(b - c)(x - 1) = 0$. Из рисунка видно, что параболы пересекают ось ординат в различных точках, то есть $b - c \neq 0$, откуда $x = 1$.

Тогда аналитическая запись функции, графиком которой является «зеленая» парабола, примет вид $y = (x + 10)(x - 1); y = x^2 + 9x - 10$, а функция, графиком которой будет «синяя» парабола, будет задана формулой

$y = x^2 - 10x + 9; y = (x - 9)(x - 1)$.

Тем самым, абсцисса точки C равна 9.

9. Одна из граней тетраэдра окрашена в красный цвет. Все остальные – в белый. Изначально тетраэдр лежит на белой грани. Раз в секунду, начиная с 0,5 секунды, тетраэдр или с вероятностью ½ остаётся на этой же грани, или с вероятностью ½ случайным образом переворачивается на какую-то грань, отличную от текущей.

Назовем A_n событие «Через n секунд тетраэдр лежит на красной грани», $p(A_n)$ – вероятность этого события.

А) Найдите $p(A_3)$ *(1 балл)*

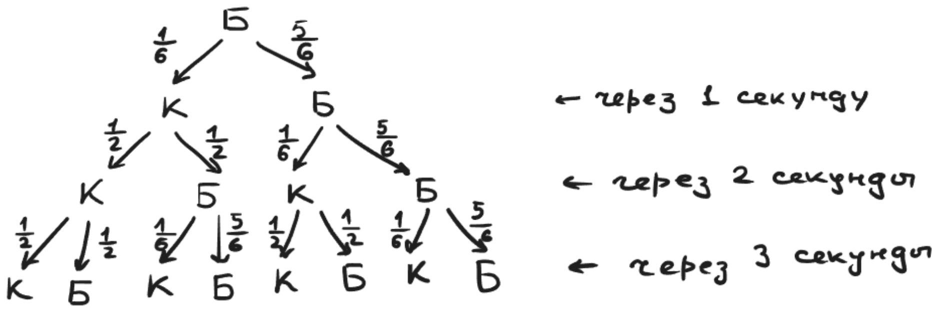
Б) Найдется ли натуральное n, для которого $p(A_n) > \frac{1}{4}$? *(3 балла)*

В) Верно ли, что последовательность $\{u_n\}: u_n = p(A_n)$ возрастающая? *(1 балл)*

Ответ: А) $\frac{13}{54}$; Б) нет; В) да.

Решение.

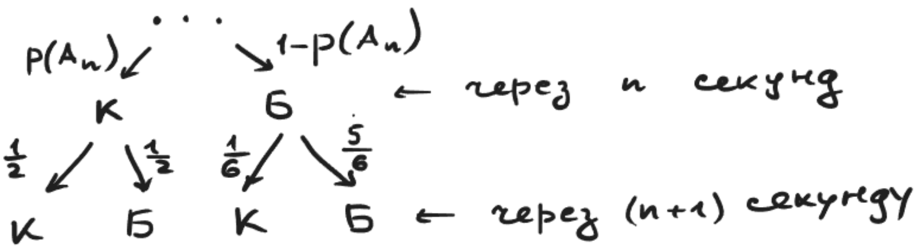
А) Составим граф-дерево, где буквой К обозначается, что тетраэдр лежит на красной грани, а буквой Б – тетраэдр лежит на белой грани.



$$p(A_3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{24} + \frac{1}{72} + \frac{5}{72} + \frac{25}{216} = \frac{13}{54}$$

Б) Из графа-дерева (см. пункт «А») видно, что $p(A_1) < \frac{1}{4}$; $p(A_2) < \frac{1}{4}$; $p(A_3) < \frac{1}{4}$. Выставим гипотезу «Для любого натурального n справедливо неравенство $p(A_n) < \frac{1}{4}$.

Индукционный переход. Рассмотрим граф:



$p(A_{n+1}) = \frac{1}{2}p(A_n) + \frac{1}{6}\left(1 - p(A_n)\right) = \frac{1}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}$.

Если для некоторого натурального k выполнено $p(A_k) < \frac{1}{4}$, то $\frac{1}{3}p(A_k) < \frac{1}{12}$, откуда

$p(A_{k+1}) < \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

Гипотеза доказана.

Иными словами, не найдется ни одного натурального n, для которого $p(A_n) > \frac{1}{4}$.

В) Из формулы $p(A_{n+1}) = \frac{1}{3}p(A_n) + \frac{1}{6}$ следует, что

$p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}p(A_n)$; из пункта «Б» верно неравенство $p(A_n) < \frac{1}{4}$.

Тогда $p(A_{n+1}) - p(A_n) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}p(A_n) > \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0$, то есть для любого целого неотрицательного n верно, что $p(A_{n+1}) > p(A_n)$. Последовательность возрастающая.

10. А) Существует ли треугольник, у которого радиус описанной окружности ровно в 2,5 раза больше радиуса вписанной окружности? *(1 балл)*

Б) Найдите $\inf\left(\frac{R}{r}\right)$ для всевозможных тупоугольных треугольников, где R – радиус описанной около треугольника окружности, r – радиус вписанной в треугольник окружности. *(4 балла)*

Ответ: А) да; Б) $1+\sqrt{2}$.

Решение.

А) Да. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 3; 4 и гипотенузой 5.

Для него $R = 2{,}5; r = \frac{2S}{P} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{3+4+5} = \frac{12}{12} = 1;\ \frac{R}{r} = 2{,}5.$

Б) Без ограничения общности, $a \le b < c$ – стороны тупоугольного треугольника.

Пусть φ – тупой угол.

Напомним, что для тупоугольных треугольников справедливо неравенство

$c^2 > a^2 + b^2$.

Тогда:

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(\frac{c}{2sin\varphi}\right)}{\left(\frac{2S}{P}\right)} = \frac{c(a+b+c)}{2absin^2\varphi} > \frac{ca+cb+c^2}{2ab} > \frac{ca+cb+a^2+b^2}{2ab} =$$

$$= \frac{a(a+c)}{2ab} + \frac{b(b+c)}{2ab} = \frac{a+c}{2b} + \frac{b+c}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \ge$$

$$\ge 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 = 1+\sqrt{2}.$$

При $\frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$ треугольник вырождается в прямоугольный равнобедренный. Если прямой угол увеличить на бесконечно малую величину $\varepsilon > 0$, но оставить равнобедренным, то треугольник станет тупоугольным, а $\frac{R}{r}$ изменится в большую сторону на другую бесконечно малую положительную величину $f(\varepsilon)$. То есть, $\inf\left(\frac{R}{r}\right) = 1+\sqrt{2}$.

P.S. Возможно решение с помощью формулы Эйлера расстояния d между центрами описанной и вписанной окружностей. $d^2 = R^2 - 2Rr$.

В тупоугольных треугольниках центр описанной окружности лежит вне треугольника, откуда $d > r$.

Тогда $R^2 - 2Rr > r^2$, откуда $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\frac{R}{r} - 1 > 0$; $\frac{R}{r} > 1 + \sqrt{2}$. Далее – как в первом способе.

11. «Мы слишком часто даем детям ответы, которые надо выучить, а не ставим перед ними проблемы, которые надо решить». *Роджер Левин*.

Пожалуй, эта цитата лучше всего описывает **нездоровую** ситуацию в современном математическом школьном образовании. Большинство ребят не способны или не хотят самостоятельно работать с математическими текстами, уповая на то, что учитель и(или) репетитор все «разжует» и «расставит знания «по полочкам».

Прочитайте статью и ответьте на несколько методических вопросов по ней.

ШАРЫ И ПЕРЕГОРОДКИ.

Метод шаров и перегородок (англ. «stars» and «bars» — букв. «звёздочки и чёрточки») — это графический метод для вывода некоторых комбинаторных теорем. Метод популяризировал Уильям Феллер в его классической книге по теории вероятностей. Метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

Предположим, что имеется *n* объектов (которые представляются **шарами**, в примере ниже *n* = 7) нужно разместить в *k* ящиках таким образом, что все ящики должны содержать по меньшей мере один объект. Ящики различаются (скажем, они пронумерованы числами от 1 до *k*), но шары неразличимы (так что конфигурации различимы по *числу шаров*, находящихся в каждом ящике). Вместо размещения шаров в ящиках шары располагаются в линию:

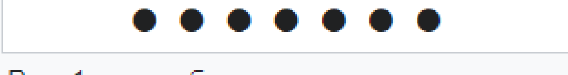


Рис. 1: семь объектов, представленных шарами

Пусть шары для первого ящика берутся слева, затем идут шары второго ящика и так далее. Таким образом, конфигурация определяется тем, какой начальный шар принадлежит первому ящику, какой первый (самый левый) шар принадлежит второму ящику и так далее. Можно отмечать это положение, помещая $k - 1$ разделяющих перегородок в некоторых местах между двумя шарами; а поскольку никакой ящик не может оказаться пустым, между двумя соседними шарами может быть не более одной перегородки:

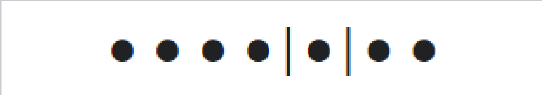


Рис. 2: две перегородки задают три ящика, содержащие 4, 1 и 2 объектов

Тогда n шаров как фиксированные объекты определяют $n-1$ промежутков между шарами, в каждый из которых можно поместить (или не поместить) одну перегородку. Нужно выбрать $k-1$ мест, в которых разместить перегородки, поэтому имеется

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

возможных конфигураций.

Ю. В. Курышова. Начала комбинаторики. *СУНЦ МГУ*. Дата обращения: 11 апреля 2018.

А) Придумайте для ребят хотя бы 4 вопроса на непосредственное извлечение или понимание/интерпретацию информации из этого текста. Напишите предполагаемые ответы на Ваши вопросы и критерии оценивания ответов. *(2 балла)*

Б) Придумайте для ребят 2 комбинаторные задачи, которые можно решить с использованием указанного в статье метода. Вторая задача должна быть **усилением** первой! Напишите условия и решения этих задач. *(3 балла)*

В) В статье указано, что исследуемый метод может быть использован для решения многих простых задач подсчёта, таких как «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один шар?»

Модифицируйте метод «шаров и перегородок» так, чтобы он мог быть использован для задач подсчёта вида: «Сколькими способами можно разложить n неразличимых шаров по k различимым ящикам, если в некоторых ящиках шаров могло не оказаться вообще?» Как изменится результирующая формула? Почему она именно так изменится? *(5 баллов)*

Решение.

А) Примеры вопросов:

- Какого вида задачи можно решать с помощью метода «шаров и перегородок»?
- В чём заключается суть метода «шаров и перегородок» (в 1-3 предложениях)?
- Почему, если ящиков k, то перегородок только $k-1$? Почему, если ящиков n, то мест для выбора перегородок только $n-1$?
- Почему в конце статьи авторами была использована формула числа сочетаний, а не, к примеру, числа размещений?

*Вопросы могут быть иными.

Б) Примеры задач:

Задача 1. Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету?

Решение: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 220$ способов.

Задача 2. Коля принес в школу 6 конфет «Птичье молоко» и 7 конфет «Кара-Кум» и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если каждый получит хотя бы 1 конфету каждого вида?

Решение: $C_5^3 \cdot C_6^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 10 \cdot 20 = 200$ способов.

*Задачи могут быть иными.

В) Новая формула примет вид:

$$C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

Для того, чтобы это понять, достаточно в каждый из k ящиков доложить по одному шару дополнительно к тем, которые уже были. То есть число перегородок не изменится, а число шаров увеличится на k, то есть число мест для перегородок станет равным $n+k-1$.

К примеру, решая задачу «Коля принес в школу 13 одинаковых конфет и решил разделить их между собой, Марком, Михаилом и Степаном. Сколькими способами это можно сделать, если некоторые ребята могли не получить конфет вообще?» следует выдать каждому из 4-х мальчиков по одной «поощрительной» конфете, то есть распределять не 13, а 17 конфет.

Решение: $C_{16}^3 = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16}{6} = 560$ способов.

Критерии оценивания:

Задание 1	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 2	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 3	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 4	
Балл	Расшифровка
2	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 5	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 6	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 7	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 8	
Балл	Расшифровка
3	Получен верный(е) ответ(ы).
0	Во всех прочих случаях

Задание 9	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
3	Верно выполнен пункт Б
1	Верно выполнен пункт В даже с недоказанной гипотезой из пункта Б
	Баллы суммируются. Максимальный балл 5.

Задание 10	
Балл	Расшифровка
1	Верно выполнен пункт А
4 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт Б Получен верный ответ в пункте Б без обоснования или с логическими и арифметическими ошибками в доказательстве.
	Баллы суммируются. Максимальный балл 5.

Задание 11	
Балл	Расшифровка
2 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт А Непосредственно к тексту статьи относятся только 2 или 3 вопроса ИЛИ даны только вопросы, но не даны ответы и(или) критерии оценивания
3 ИЛИ 1	Верно выполнен пункт Б Даны 2 задачи с усилением без решений или с ошибочным решением ИЛИ Даны 2 задачи со всеми комментариями, но сюжет второй задачи не усиливает первую задачу.
5 ИЛИ 3	Верно выполнен пункт В Верно записана формула, но комментарии отсутствуют или недостаточны.
	Баллы суммируются. Максимальный балл 10.