Подмосковная олимпиада учителей математики – 2024 **Решения и критерии оценивания заключительного тура**
Предметный блок. В заданиях №№1-4 требуется написать полное развёрнутое решение. Каждое верно решенное задание №№ 1-4 оценивается **пятью** баллами. **Методический блок.** В заданиях №№ 5-7 требуется написать полный развёрнутый ответ на предлагаемые методические вопросы. Каждое верно решенное задание №№ 5-6 оценивается **пятью** баллами. Верно решенное задание №7 оценивается **десятью** баллами. Максимальный балл за всю работу – 40. Время выполнения работы – 3 часа.

1. Даны два прямых круговых конуса. Радиусы оснований у них одинаковы, но площадь боковой поверхности второго конуса вдвое больше площади боковой поверхности первого конуса. Докажите, что отношение объёмов второго и первого конусов больше двух. *(5 баллов)*

Решение.

Пусть R – радиус оснований конусов, l и m – образующие 1-го и 2-го конусов соответственно.

1) Из условия задачи: $\frac{\pi Rm}{\pi Rl} = 2$, откуда $m = 2l$.

2) Тогда с помощью теоремы Пифагора определяются высоты h_1 и h_2 первого и второго конусов соответственно.

$h_1 = \sqrt{l^2 - R^2}$; $h_2 = \sqrt{4l^2 - R^2}$

3) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h_2}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{4l^2-R^2}{l^2-R^2}} = \sqrt{4 + \frac{3R^2}{h_1^2}} > \sqrt{4} = 2$, что и требовалось доказать.

Критерии.

Балл	Расшифровка
5	Приведено полное развернутое решение
3	Решение доведено до $\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{4l^2-R^2}{l^2-R^2}}$
2	Решение доведено до нахождения $h_1 = \sqrt{l^2 - R^2}$; $h_2 = \sqrt{4l^2 - R^2}$
1	Доказано лишь, что образующие конусов отличаются вдвое.
	Максимальный балл 5

2. А) Верна ли теорема: «Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные и возрастающие на R функции, то и $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ – тоже непрерывная и возрастающая на R функция»? Если нет – следует обосновать ошибку формулировки и дать корректную формулировку с уточнением. *(2 балла)*

Б) Верна ли теорема: «Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на R функции, и для всех вещественных значений аргумента $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x) -$ убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет ровно один вещественный корень»? Если нет – следует обосновать ошибку формулировки и дать корректную формулировку с уточнением. *(2 балла)*

В) Решите уравнение $3^{16+x} \cdot 4^{4+x} \cdot 5^{3x} = 540^{8-x}$ *(1 балл)*

Решение.

А) Формулировка неверна. Простой контрпример: $f(x) = x; g(x) = x^3$. Тогда $h(x) = x^4$ – не является возрастающей на R функцией.

Одно из возможных уточнений: «Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные и возрастающие на R функции, **принимающие на R строго положительные значения**, то $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ – тоже непрерывная и возрастающая на R функция»

Б) Формулировка неверна. Простой контрпример: $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

$g(x) = arcctg(x)$. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет вещественных корней.

Одно из возможных уточнений: «Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на R функции, и для всех вещественных значений аргумента $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x) -$ убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет **не более одного вещественного корня**»

В) Пусть $f(x) = 3^{16+x} \cdot 4^{4+x} \cdot 5^{3x}$. Это непрерывная и возрастающая на R функция, так как является произведением 3-х возрастающих функций, принимающих строго положительные значения при любом значении переменной x.

$g(x) = 540^{8-x}$ – непрерывная и убывающая на R функция.

Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного вещественного корня.

Подбором: $x = 2$.

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
А	2	Приведен контрпример И дана какая-либо корректная формулировка

А	1	Приведен контрпример ИЛИ дана какая-либо корректная формулировка
Б	2	Приведен контрпример И дана какая-либо корректная формулировка
Б	1	Приведен контрпример ИЛИ дана какая-либо корректная формулировка
В	1	Любым методом верно найден единственный корень уравнения
		Баллы суммируются. Максимальный балл 5

3. Пусть $\overline{abcd}$ – четырёхзначное число, **не содержащее нулей** в десятичной записи.

А) Докажите, что $|\overline{abcd} - \overline{dcba}| \vdots 9$ *(1 балл)*

Б) Может ли $|\overline{abcd} - \overline{dcba}|$ оканчиваться цифрой 1? *(1 балл)*

В) Оказалось, что $|\overline{abcd} - \overline{dcba}| = 270$. Для скольких различных четырёхзначных чисел $\overline{abcd}$, удовлетворяющих условию задачи, могло быть выполнено данное уравнение? *(3 балла)*

Решение.

А) $|\overline{abcd} - \overline{dcba}| = |(1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a)| =$
$= |999(a - d) + 90(b - c)| = 9|111(a - d) + 10(b - c)|$, что кратно 9, ч. т. д.

Б) $90(b - c)$ всегда оканчивается нулём; величина $(a - d)$ может быть равной $\{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Ни при одном из этих значений $999(a - d)$ единицей не заканчивается. Тогда $|\overline{abcd} - \overline{dcba}| =$

$= |999(a - d) + 90(b - c)|$ тоже никогда не оканчивается единицей. Ответ: нет.

В) $|999(a - d) + 90(b - c)| = 270$. Если $|a - d| \neq 0$, то

$|999(a - d) + 90(b - c)| \geq 279 > 270$. То есть, $a = d$. Тогда $|b - c| = 3$.

Число способов выбрать пару равных цифр $a; d$ равняется 9.

Число способов выбрать пару ненулевых цифр $b; c$ таких, что $|b - c| = 3$ равно 12.

Итого имеем $9 \cdot 12 = 108$ различных четырёхзначных чисел $\overline{abcd}$ без нулей в десятичной записи, для которых $|\overline{abcd} - \overline{dcba}| = 270$.

Ответ: 108.

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
А	1	Приведено обоснованное доказательство
Б	1	Обоснованно получен верный ответ
В	3	Обоснованно получен верный ответ
В	1	Решение доведено до системы условий $a = d;\ \lvert b - c\rvert = 3$.
		Баллы суммируются. Максимальный балл 5

4. В алфавите племени N есть только 10 букв «А; Б; В; Г; Д; Е; Ж; З; И; К».

«Словом» называется любая последовательность букв (возможно, одинаковых).

А) Сколько четырёхбуквенных «слов» в этом племени? *(1 балл)*

Б) Сколько четырёхбуквенных «слов» в этом племени, если все использованные буквы различны? *(1 балл)*

В) Найдите математическое ожидание количества различных букв, использованных в случайно сгенерированном четырёхбуквенном «слове» этого племени. *(3 балла)*

Решение.

А) Каждая буква могла быть выбрана десятью способами.

Итого: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ возможных четырёхбуквенных слов в этом племени.

Ответ: 10000.

Б) Задача равносильна поиску числа размещений четырёх элементов из десяти различных имеющихся: $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ «слов»

Ответ: 5040.

В) Составим закон распределения дискретной случайной величины N – числа различных букв в четырёхбуквенном слове.

N	1	2	3	4
$p(N)$	0,001	0,063	0,432	0,504

$$p(1) = \frac{10}{10000} = 0{,}001$$

Если какая-то буква встретилась три раза, то найдется 10 способов выбрать эту повторяющуюся букву, 4 способа распределить 3 повторяющиеся буквы в четырёхбуквенном слове и 9 способов выбрать букву, отличную от первых трёх.

Итого: $10 \cdot 4 \cdot 9 = 360$ «слов» ровно с тремя одинаковыми буквами.

Если «слово» состоит из двух пар одинаковых букв, то найдется $C_{10}^2 = 45$ способов выбрать пары повторяющихся букв и $C_4^2 = 6$ способов распределить эти пары в четырёхбуквенном слове.

Итого: $45 \cdot 6 = 270$ «слов» с двумя парами одинаковых букв.

$p(2) = \frac{360+270}{10000} = 0{,}063$

$p(3) = 1 - p(1) - p(2) - p(4) = 0{,}432$

$E(N) = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) = 0{,}001 + 0{,}126 + 1{,}296 + 2{,}016$

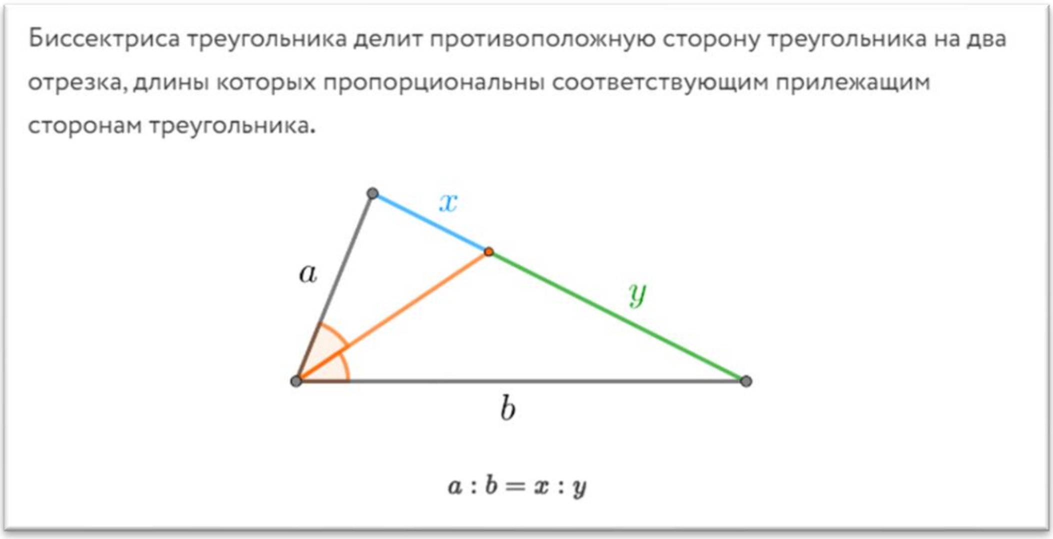
Ответ: 3,439.

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
А	1	Дан верный ответ
Б	1	Дан верный ответ
В	3	Обоснованно получен верный ответ
В	2	Верно рассчитаны все вероятности или числа способов сгенерировать четырёхбуквенное слово с 1, 2, 3, 4 различными буквами. Есть ошибка вычислительного характера при поиске математического ожидания.
В	1	Методически верно рассчитаны все вероятности или числа способов сгенерировать четырёхбуквенное слово с 1, 2, 3, 4 различными буквами. Математическое ожидание может быть не вычислено вообще ИЛИ имеется вычислительная ошибка при поиске вероятностей.
		Баллы суммируются. Максимальный балл 5

5. Всем учителям хорошо известно опорное свойство биссектрисы треугольника.

ТЕОРЕМА:



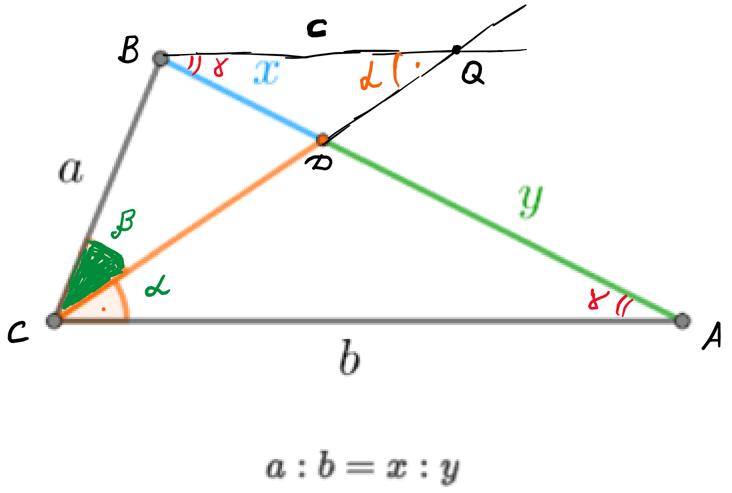
А) Сформулируйте теорему, обратную данной. *(1 балл)*

Б) Докажите сформулированную Вами в пункте «А» обратную теорему. *(4 балла)*

Решение.

А) Если чевиана треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то эта чевиана является биссектрисой.

Б) Доказательство (кратко).



Построим $BQ||AC;\ BQ \cap CD = Q$. Пусть $BQ = c$

Из подобия треугольников BQD & ACD по двум углам (см.рис.) следует,

что $\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$, откуда $c = \frac{bx}{y}$.

Из условия задачи: $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, откуда $a = \frac{bx}{y} = c$.

$\widehat{BQC} = \widehat{QCA} = \alpha$ (как накрест лежащие при $BQ||AC$ и секущей CQ).

Так как треугольник BCQ – равнобедренный с основанием CQ, то по свойству: $\widehat{BCQ} = \widehat{BQC};\ \alpha = \beta$. Тогда CD – биссектриса, ч. т. д.

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
А	1	Верно сформулирована обратная теорема.
Б	4	Приведено верное доказательство обратной теоремы.
Б	1	Сделано какое-либо дополнительное построение, сводящее задачу к поиску равнобедренного треугольника
		Баллы суммируются. Максимальный балл 5

6. В качестве одного из упражнений в рамках домашнего задания ученикам 10-го класса было предложено решить уравнение $sinx + \sqrt{3}cosx = 1$.

Перед Вами пять различных «решений» этого задания. Есть ли среди «решений» верные? В каждом **неверном** решении укажите **все** места, в которых допущены ошибки. На основе этих ошибок сформулируйте индивидуальные **предметные дефициты** учеников, отмеченные Вами в каждом решении (к примеру, «незнание формулы площади треугольника» ИЛИ «деление обеих частей уравнения на переменную, значение которой могло равняться нулю» ИЛИ «использована замена, ограничивающая общность задачи»). *(По 1 баллу за анализ каждого «решения»)*

Анализ.

Решение №1:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

$$\sqrt{3}\cos x = 1 - \sin x$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 3\cos^2 x = 1 - 2\sin x + \sin^2 x \end{cases}$$

$$3 - 3\sin^2 x = 1 - 2\sin x + \sin^2 x$$

$$4\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$t = \sin x$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot n, \ n \in \mathbb{Z}$$

(нет проверки по условию: $\cos x \geq 0$)

Отв: $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot n, \ n \in \mathbb{Z}$

Ученик не владеет техникой равносильного перехода при возведении в чётную степень обеих частей уравнения ИЛИ не делает проверку после перехода-следствия (возведения в квадрат).

Ученик не владеет математической символикой (путает системы и совокупности)

Решение №2:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \quad \Big| :2$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

Тут $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\cancel{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$\to$ если решается $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, то $x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Ученик не знает формул косинуса/синуса суммы/разности, демонстрирует ИЛИ незнание табличных значений тригонометрических функций ИЛИ просто в его голове «заложилось» ассоциативно неверное: «$\frac{\pi}{3}$ - это 30°», «$\frac{\pi}{6}$ - это 60°»

Решение №3:

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ неравносильно

при $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0 \; (*)$

верно $\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$

$$1 + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$$

$$2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$$

$\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

не удовл $(*)$ $\quad$ удовлетвор $(*)$

Не по тому неравенству выполнена проверка

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Дефицит ученика – решение неравенств, в частности в вопросе деления/умножения обеих частей неравенства на переменную, знак которой заведомо не определен.

Решение №4:

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$a = \sin x$; $b = \cos x$

$$\begin{cases} a + \sqrt{3}b = 1 & (1) \\ a^2 + b^2 = 1. & (2) \end{cases}$$

Из (1): $a = 1 - \sqrt{3}b$

(2): $(1 - \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 1$

$$1 - 2\sqrt{3}b + 3b^2 + b^2 = 1$$

$$4b^2 = 2\sqrt{3}b$$

$$b_1 = 0; \quad b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Если $b_1 = 0$, то $a_1 = 1$

Если $b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Верное решение. Дефицитов нет.

Решение №5:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, откуда

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$2t + \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 = 1 + t^2$$

$$(\sqrt{3}+1)t^2 - 2t + (1-\sqrt{3}) = 0$$

$$D = 4 - 4(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 12$$

$$t_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = 1$$

$$t_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \\ &\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2+\sqrt{3} \end{aligned}\right. ; \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z \\ &x = 2\operatorname{arctg}(-2+\sqrt{3}) + 2\pi m, m \in Z \end{aligned}\right.$$

Исходное уравн. определено при любых $x \in R$. Универсальная подстановка не включает случай $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. Этот случай рассматривается отдельно

Похвально, что ученик владеет универсальной тригонометрической подстановкой, но эта подстановка умаляет общность задачи: не рассмотрен случай, когда тангенс половинного аргумента не определяется.

Потерянный минус при нахождении корня квадратного уравнения можно отнести как к неверному использованию формул сокращенного умножения, так и в невнимательности ученика.

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
Реш 1	1	Найдены **все** ошибки, сформулированы все предметные дефициты
Реш 2	1	Найдены **все** ошибки, сформулированы все предметные дефициты
Реш 3	1	Найдены **все** ошибки, сформулированы все предметные дефициты
Реш 4	1	Указано, что решение верное, ошибок не содержит
Реш 5	1	Найдены **все** ошибки, сформулированы все предметные дефициты
		Баллы суммируются. Максимальный балл 5

7. Прочитайте «нестандартные» решения двух задач.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1: Два велосипедиста выезжают одновременно по прямой из пунктов А и В навстречу друг другу. Один прибывает в пункт В через 27 минут после встречи, а другой прибывает в пункт А через 12 минут после встречи. За сколько минут проехал каждый велосипедист свой путь?

Решение:

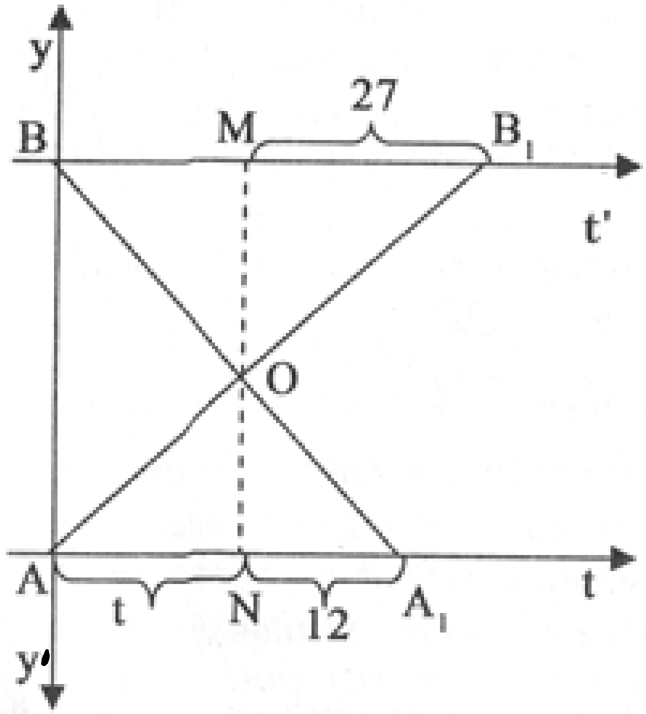


Рисунок 1.

Рассмотрим две системы координат (tAy) и $(t'By')$ (рис. 1). На оси Аt откладываем время движения первого велосипедиста, а на оси Вt' – время движения второго велосипедиста. Оси At и Bt' сонаправлены. Оси пройденного пути противоположно направлены, длина отрезка AB в каждом случае равна пройденному пути. Отрезок AB_1 – график движения первого велосипедиста, а отрезок BA_1 – график движения второго. Точка O соответствует моменту их встречи. Время движения до встречи обозначим t.

ΔB_1OM подобен ΔAON, ΔMOB подобен ΔNOA_1. Тогда $\frac{MB_1}{AN} = \frac{MO}{ON}$ и $\frac{MB}{A_1N} = \frac{MO}{ON}$. Из равенства следует: $\frac{27}{t} = \frac{t}{12}$, откуда $t = 18$. Таким образом, первый велосипедист проехал весь путь за $18 + 12 = 30$ (мин.), а второй за $18 + 27 = 45$ (мин.).

Ответ: 30 минут, 45 минут.

Задача 2: На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой её можно сделать на 15 мин. быстрее, чем на второй?

Решение:

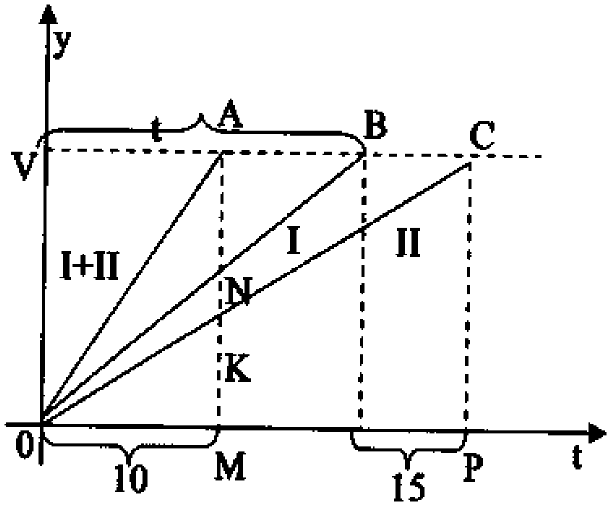


Рисунок 2.

На оси абсцисс будем откладывать время работы копировальных машин в минутах (рис. 2). Обе машины, работая вместе, сделают копию за 10 мин.

$(OM = 10)$. Тогда одной первой для этого понадобится t мин, а одной второй – $(t + 15)$ мин. Положение точки V на оси ординат соответствует объёму работы, которую необходимо выполнить.

Так как объём работы прямо пропорционален затраченному времени, то график «работы» копировальных машин представляют собой отрезки: OB – график работы первой, OC – график работы второй, OA – график совместной работы.

Рассмотрим две пары подобных треугольников OCP и OKM: Покажем, что $AN = KM$. За 10 мин. первая машина выполнит часть работы, соответствующую отрезку NM (AN – отрезок работы, который выполнит вторая машина (в силу того, что за 10 минут будет выполнена вся работа двумя копировальными машинами)). Но за 10 минут вторая машина выполнит часть работы, соответствующую MK. Поэтому $AN = KM$. Учитывая это равенство и то, что $CP = VO$, получаем соотношение: $\frac{VB}{AB} = \frac{OP}{OM}$, из которого легко перейти к уравнению $\frac{t}{t-10} = \frac{t+15}{10}$.

Решая это уравнение, находим положительный корень $t = 15$. Таким образом, первая машина сделает копию пакета документов за 15 мин, а вторая – 30 мин.

Ответ: 15 мин, 30 мин.

Решение.

А) Оцените корректность 2-х обобщающих утверждений по **задаче 1** (верно или неверно):

№	Утверждение	Верно/ неверно
1	Если два объекта выезжают одновременно по прямой из пунктов A и B навстречу друг другу, и один прибывает в пункт B через t_1 минут после встречи, а другой прибывает в пункт A через t_2 минут после встречи, то место их встречи гарантированно в $\frac{t_2}{t_1}$ раз ближе к пункту А, чем к пункту Б.	**Неверно**
2	Если два объекта выезжают одновременно по прямой из пунктов A и B навстречу друг другу, и один прибывает в пункт B через t_1 минут после встречи, а другой прибывает в пункт A через t_2 минут после встречи, то время от момента старта до момента встречи объектов всегда определяется как среднее геометрическое величин t_1 и t_2.	**Верно**

(2 балла)

Б) Решите следующую задачу **геометрически** (по образцу решения **задачи 2**).

На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10 мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой её можно сделать в 5 раз быстрее, чем на второй?

(2 балла)

Решение:

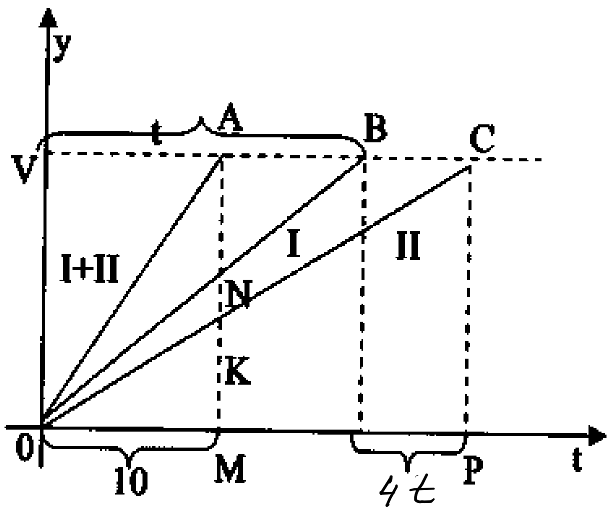


Рисунок 2.

На оси абсцисс будем откладывать время работы копировальных машин в минутах (рис. 2). Обе машины, работая вместе, сделают копию за 10 мин.

($OM = 10$). Тогда одной первой для этого понадобится t мин, а одной второй – ($5t$) мин. Положение точки V на оси ординат соответствует объёму работы, которую необходимо выполнить.

Так как объём работы прямо пропорционален затраченному времени, то график «работы» копировальных машин представляют собой отрезки: OB – график работы первой, OC – график работы второй, OA – график совместной работы.

Рассмотрим две пары подобных треугольников OCP и OKM: Покажем, что $AN = KM$. За 10 мин. первая машина выполнит часть работы, соответствующую отрезку NM (AN – отрезок работы, который выполнит вторая машина (в силу того, что за 10 минут будет выполнена вся работа двумя копировальными машинами)). Но за 10 минут вторая машина выполнит часть работы, соответствующую MK. Поэтому $AN = KM$. Учитывая это равенство и то, что $CP = VO$, получаем соотношение: $\frac{VB}{AB} = \frac{OP}{OM}$, из которого легко перейти к уравнению $\frac{t}{t-10} = \frac{5t}{10}$.

Решая это уравнение, находим положительный корень $t = 12$. Таким образом, первая машина сделает копию пакета документов за 12 мин, а вторая – 60 мин.

Ответ: 12 мин, 60 мин.

В) Придумайте текстовую задачу на равномерное движение по прямой, в геометрической интерпретации решения которой использовалось бы опорное свойство центроида треугольника: «Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в точке пересечения в отношении 2:1, считая от вершины». **Напишите условие и полное развернутое решение этой задачи.**

(6 баллов)

Критерии.

Вопрос	Балл	Расшифровка
А	2	Даны два верных ответа
А	1	Дан только один верный ответ
Б	2	Приведено обоснованное и верное геометрическое решение задачи
Б	1	Приведено обоснованное геометрическое решение задачи, в решении присутствует негрубая вычислительная ошибка или ошибка алгебраических преобразований, в результате которой дан неверный ответ.
В	6	Придумана (сформулирована) корректная задача И приведено её верное и обоснованное решение с использованием указанного в условии свойства центроида треугольника.

В	3	Придумана (сформулирована) корректная задача, в решении которой используется указанное в условии свойство центроида треугольника, решение неверно или отсутствует.
		Баллы суммируются. Максимальный балл 10