Подмосковная Олимпиада Учителей 2022-2023г. Отборочный этап.

В каждой задаче ответом является только число. При необходимости его надо округлить до сотых. Если ответов несколько, то нужно их ввести через пробел в любом порядке. (Единицы измерения, знаки % и прочие писать не нужно.)

1. Три чересчур добрых учителя ставили пятёрки школьникам в журнал. Когда строгий завуч увидел и прекратил это безобразие, первый успел поставить пятёрки 83% школьников, второй – 59% школьников, третий – 66% школьников. Сколько школьников (в %) при этом гарантированно получили три пятёрки?
Решение. Ответ: 8.
Первый учитель не поставил пятёрки 17% школьников, второй не поставил пятёрки 41% школьников, третий не поставил пятёрки 34% школьников. $17+41+34=92$. То есть не менее 8% школьников каждый из трёх учителей поставил пятерку. Покажем, что такая ситуация возможна: пусть 17% школьников поставили пятёрки только второй и третий учителя, 41% школьников – только первый и третий учителя, 34% школьников – только первый и второй учителя, при этом 8% школьников получили пятёрки от каждого из трёх.

2. Однажды Иван Иванович поссорился с Иваном Никифоровичем, после чего второй предложил первому заключить договор на год, в течение которого Иван Иванович обязуется не обмолвиться с ним ни единым словом. Согласно договору, за каждый день этого года, что Иван Иванович не должен с ним разговаривать, Иван Никифорович обязуется отдавать тому гуся, но если Иван Иванович нарушит условие и заговорит с Иваном Никифоровичем, то должен будет отдать тому 10 гусей за каждый такой день. В свою очередь, Иван Иванович пожелал иных условий, а именно, получать от Ивана Никифоровича по 6 гусей в день в случае своего молчания, и отдавать ему по 66 гусей в день, если заговорит с тем. Они решили, что окончательно договорятся позже, однако это не потребовалось, так как по истечении года оказалось, что один должен отдать другому определённое количество гусей независимо от способа подсчёта. Сколько гусей придётся отдать согласно договорённости?
Решение. Ответ: 36.
Пусть в году x дней (точно неизвестно, ведь год может быть високосным). Также пусть y дней в этом году Иван Иванович не разговаривал с Иваном Никифоровичем, а значит, $x-y$ дней – разговаривал. Получаем $y-10(x-y)=6y-66(x-y)$, то есть $y=\dfrac{56x}{61}$. Числа 56 и 61 взаимно просты, поэтому x должно делиться на 61 нацело, следовательно, $x=366$ (то есть год високосный), $y=336$, откуда получаем, что Иван Никифорович должен отдать Ивану Ивановичу 36 гусей.

3. При каком наименьшем значении k уравнения $x^2-4kx+44=0$ и $2x^2-5kx+52=0$ имеют общий корень?

Решение. Ответ: -6.

Общий корень этих уравнений должен быть и корнем уравнения $(2x^2-5kx+52)-2(x^2-4kx+44)=0$. То есть $3kx-36=0$. Откуда $x=\dfrac{12}{k}$. Подставив, например, в первое уравнение, получим $\dfrac{144}{k^2}-4=0$. Значит, $k=6$ или $k=-6$, а так как требуется наименьшее значение k, то $k=-6$.

4. Известно, что при некоторых натуральных значениях a, b и c значения выражений $3a-4b+2025, 2b-c+2022, 2c-3a+2023$ являются последовательными натуральными числами в порядке возрастания. Найдите наименьшее значение выражения $a+b+c$.

Решение. Ответ: 11.

Заметим, что в силу условия сумма первого и третьего чисел равна удвоенному второму. Откуда получаем, что $2b-c=1$, то есть второе число равно 2023. Тогда первое число равно 2022, а третье равно 2024. Значит, $3a-4b=-3$. Но тогда b кратно 3, то есть $b=3k$, где k – некоторое натуральное число. Отсюда получаем, что $a=4k-1, c=2b-1=6k-1$. То есть $a+b+c=13k-2=11$ при $k=1$, это наименьшее допустимое значение выражение, так как по условию a, b и c – натуральные, значит, $a+b+c$ – также натуральное.

5. Школьники ходили в лес за грибами. Известно, что их было по крайней мере 4 человека. Любые 4 школьника собрали вместе меньше 25 грибов. Какое наименьшее количество школьников ходило за грибами, если всего они собрали 102 гриба?

Решение. Ответ: 17.

Заметим, что для 17 школьников, каждый из которых набрал по 6 грибов, условие выполняется. Если школьников 16 или меньше, то их можно разделить на четыре группы, в каждой из которых будет не более четырёх школьников. Известно, что каждая такая группа набрала меньше 25, а значит, не более 24 грибов. То есть четыре такие группы наберут не более $4\cdot 24=96$ грибов. Противоречие.

6. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка M такая, что расстояния от неё до сторон AB и AC равны соответственно $8\sqrt{3}$ и $7\sqrt{3}$. Найдите AM.

Решение. Ответ: 26.

Пусть точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных соответственно на стороны AB и AC треугольника ABC. Пусть прямые AD и ME пересекаются в точке F. Тогда $MD=8\sqrt{3}, ME=7\sqrt{3}$, угол AFE равен 30 градусов, значит $FD = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24, FM = 2 \cdot 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$. Но тогда из подобия треугольников FDM и FEA следует, что $FD/FE = MD/AE$, то есть $AE = (7\sqrt{3} + 16\sqrt{3})/\sqrt{3} = 23$. Но тогда по теореме Пифагора из треугольника AME находим, что $AM = 26$.

7. Найдите сумму тангенсов всех x, удовлетворяющих условиям: $sin(2x)+5cos(2x) = 3$ и $-4\pi < x < 4\pi$.

Решение. Ответ: 2.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой и запишем уравнение из условия в виде

$$\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)} + 5\frac{1-tg^2(x)}{1+tg^2(x)} = 3$$

Тогда $2tg(x) + 5 - 5tg^2(x) = 3 + 3tg^2(x)$ или $4tg^2(x) - tg(x) - 1 = 0$.

Так как дискриминант этого квадратного уравнения $1 + 16 = 17 > 0$, то по теореме Виета сумма двух различных значений $tg(x)$ равна $\frac{1}{4}$. Но каждое из двух значений принимается дважды на каждом интервале $2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, где k – некоторое целое число. Причём x $= 2\pi k$ не является решением. Тогда на интервале $-4\pi < x < 4\pi$ сумма тангенсов всех x, удовлетворяющих условиям, будет равна $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$.

8. В трёхмерном пространстве задана прямоугольная система координат и через точки с целыми координатами проведены прямые, параллельные осям координат. По некоторым из этих линий нарисовали прямоугольный параллелепипед. Оказалось, что строго внутри него общая длина отрезков этих прямых численно на 1441 больше количества точек с целыми координатами. Кроме того, площадь поверхности этого параллелепипеда численно равна $\frac{2}{3}$ его объёма, а его линейные размеры отличаются друг от друга не больше чем вдвое. Найдите длину диагонали этого параллелепипеда.

Решение. Ответ: 18.

Пусть размер этого параллелепипеда $k \cdot m \cdot n$. Тогда количество точек с целыми координатами, находящихся строго внутри него, равно $(k-1)(m-1)(n-1)$. Общая длина отрезков внутри каждого «слоя» $m \cdot n$ равна $m(n-1) + n(m-1)$, при этом таких «слоёв» $k-1$. Кроме того, общая длина отрезков между этими слоями равна $k(m-1)(n-1)$. Тогда по условию $(k-1)(m(n-1) + n(m-1)) + k(m-1)(n-1) - (k-1)(m-1)(n-1) = 1441$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим, что $2kmn - km - kn - mn + 1 = 1441$. Далее воспользуемся условием о соотношении между площадью поверхности этого параллелепипеда и его объёмом: $2(km + kn + mn) = \frac{2}{3}\ kmn$. Получим $\frac{5}{3}\ kmn + 1 = 1441$, откуда $kmn = 864$.

Далее, пусть с учётом соотношения между ними, $k \le m \le n \le 2k$. Отсюда следует, что $k^3 \le kmn \le 4k^3$, а с учётом того, что k – натуральное, $6 \le k \le 9$. Так как $864 = 2^5 \cdot 3^3$, то возможны варианты k = 6, k = 8, k = 9.
1) Если k = 6, то mn = 144. Но $n \le 12$, поэтому $m \ge 12$, то есть $m = n = 12$. Отсюда, по формуле $\sqrt{k^2 + m^2 + n^2}$, получаем, что длина искомой диагонали равна 18. Причём заметим, что соотношение между площадью поверхности этого параллелепипеда и его объёмом выполняется: $2(km + kn + mn) = \dfrac{2}{3}\,kmn = 576$
2) Если k = 8, то mn = 108. Так как 108 не делится на 8 нацело, то $m \ge 9$, $n \le 12$, при этом $m = 9, n = 12$ является решением в целых числах уравнения $kmn = 864$, однако не является решением задачи, так как соотношение между площадью поверхности такого параллелепипеда и его объёмом не выполняется: $2(km + kn + mn) = 552 \ne 576 = \dfrac{2}{3}\,kmn$.
Если же $m \ge 10$, $n < 11$, но $m = n = 10$ не является решением, поэтому других решений в этом случае нет.
3) Если k = 9, то mn = 96. Так как 96 не делится на 9 нацело, то $m \ge 10$, но тогда $n < 10$, что невозможно.

9. В 9 классе учатся только отличники и двоечники. Отличники всегда говорят правду, а двоечники всегда лгут. Учитель раздал каждому ученику либо карандаш, либо ручку. Каждый ученик сказал: «У меня в руках ручка». Затем учитель разрешил поменяться предметами, но так, чтобы после обмена у каждого снова было ровно по одному предмету. После чего ровно половина детей сказали: «У меня в руках ручка», а оставшиеся сказали: «У меня в руках карандаш». Сколько отличников держит карандаш после обмена, если всего в классе 28 человек?
Решение. Ответ: 7.
Изначально все отличники держат ручку, а все двоечники – карандаш. Значит, количество отличников, получивших после обмена карандаш, равно количеству двоечников, получивших после обмена ручку. И те и другие сказали, что держат теперь карандаш. Так как всего 14 человек сказали, что держат в руке карандаш, то отличников среди них 14 : 2 = 7.

10. Дана трапеция $ABCD$ ($BC||AD$). Окружность w, описанная около треугольника ABC, пересекает отрезок AD в точке E. При этом $\angle ABE = \angle BAC = \angle ADC$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $CD = 18\sqrt{13}$, $AE = 24$.
Решение. Ответ: 1836.
AC и BE пересекаются в точке O. Так как $\angle ABE = \angle BAC$, то $AO = BO$. С другой стороны, $ABCE$ – трапеция, которая вписана в окружность, значит, она равнобедренная. Следовательно, $\angle OAE = \angle OEA$ и $AO = EO$. Значит, треугольник ABE – прямоугольный, $ABCE$ – прямоугольник, O – центр окружности w. Далее, угол между BC и CD равен $\angle ADC$, так как $BC||AD$. А так как $\angle BAC = \angle ADC$, то CD – касательная к окружности w. O лежит на AC,

следовательно, $\angle ACD$ – прямой. Воспользуемся соотношением между касательной и отрезками секущей: $CD^2 = DE \cdot (AE + DE)$. Решая уравнение, находим, что $DE = 54$. Затем, так как CE – высота в прямоугольном треугольнике ACD, то $CE^2 = AE \cdot DE$, откуда $CE = 36$. Значит, площадь трапеции $ABCD$ равна $\dfrac{CE(BC + AD)}{2} = 1836$.