Подмосковная олимпиада учителей 2022-2023

II тур. 17 июня 2023 г.

Олимпиада состоит из двух частей: математической и методической.

В ***математической части*** *вам предлагается решить 3 задачи. Полное, достаточно подробное и обоснованное решение каждой из них оценивается в 4 балла.*

(Если решение содержит дефекты, но в целом является верным, оно будет оценено в 3 балла. Если верного решения нет, но есть ценные продвижения, текст будет оценён в 1 балл. Решение, верное «наполовину» (например, упущен один из двух равносложных случаев) будет оценено в 2 балла.)

В ***методической части*** *вам предлагается проверить решения 6 задач. Правильная проверка каждого из них оценивается в 2 балла. Более подробные критерии приведены ниже.*

Таким образом, максимум можно набрать 24 балла.

Задачи ***не*** *упорядочены по сложности и решать можно в любом порядке.*

Удачи!

Математическая часть

1. Сколько различных решений в целых числах (относительно x) имеет уравнение $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n+4} = x$, где n – целое число.

   Решение.

   Решение I.

   Ответ: 13.

   Преобразуем левую часть уравнения, перемножив выражения в числителе и выделив целую часть. После преобразования получим:

   $n^3 + 2n^2 + 3n - 6 + \dfrac{24}{n+4} = x.$

   При целых значениях n выражение $n^3 + 2n^2 + 3n - 6$ принимает только целые значения. Поэтому, чтобы число x было целым необходимо и достаточно, чтобы 24 делилось нацело на $n+4$. Таким образом $n+4$ может принимать только следующие значения: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24$. То есть $n \in \{-28; -16; -12; -10; -8; -7; -6; -5; -3; -2; -1; 0; 2; 4; 8; 20\}$

   Вычислим значения x в зависимости от значения n:

   $x(-28) = -20475; x(-16) = -3640; x(-12) = -1485; x(-10) = -840; x(-8) =$

$-420; x(-7) = -280; x(-6) = -180; x(-5) = -120; x(-3) = x(-2) = x(-1) = x(0) = 0; x(2) = 20; x(4) = 105; x(8) = 660; x(20) = 8855.$
Отсюда несложно заметить, что x принимает 13 целых различных значений.

Решение II.
Ответ: 13.
Пусть сначала $n \geq 1$. Заметим, что $n+4$ не может содержать простые делители большие или равные 5. В самом деле, в противном случае знаменатель будет содержать простой множитель больший или равный 5, а числитель – нет, то есть x будет не целым числом. Тогда $n+4 = 2^a \cdot 3^b$, где a и b – целые неотрицательные числа.
Далее заметим, что $b \leq 1$. Действительно, если предположить обратное, то получим, что среди пяти последовательных натуральных чисел не более одного, кратного 9 (это число $n+4$) и не более двух, кратных 3, то есть множитель 3 входит в разложение числа $n+1$ (а значит и в разложение числителя) не более, чем в первой степени, в то время как знаменатель будет кратен 9, то есть x – не целое, противоречие.
Также, $a \leq 3$, иначе $n+4$ кратно 16, но среди пяти последовательных натуральных чисел не более одного, кратного 8 (это число $n+4$) и не более двух, кратных 4, то есть множитель 2 входит в разложение числа n не более, чем во второй степени. Аналогично, множитель 2 входит в разложение числа $n+2$ не более, чем в первой степени, так как среди трёх последовательных натуральных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ не более одного, кратного 4 (это число $n+4$) и не более двух, кратных 2. То есть числитель дроби в разложении на простые множители будет содержать множитель 2 в степени не выше третьей, в то время как знаменатель будет кратен 16, то есть x – не целое, противоречие.
Тогда, с учётом $n \geq 1$, $n+4$ может принимать только 4 значения – 6, 8, 12, 24. Несложно убедиться, что при каждом из них x принимает попарно различные натуральные значения.
Пусть $-3 \leq n \leq 0$, тогда $x = 0$.
При $n = -4$ левая часть уравнения не определена.
Пусть $n < -4$. Тогда возможные значения x будут отрицательными, то есть будут отличаться от уже найденных, а значит, достаточно найти количество натуральных (относительно x) решений уравнения $(m+4)(m+3)(m+2)(m+1) = xm$, где m – натуральное число. Рассуждая аналогично первой части решения, получим, что $m = 2^c \cdot 3^d$, где c и d – целые неотрицательные числа, причём $0 \leq c \leq 3$, $0 \leq d \leq 1$. Тогда с может принимать 4 значения, а d

– 2 значения, значит, m может принимать $4 \cdot 2 = 8$ различных значений. Несложно убедиться, что при каждом из них x принимает попарно различные натуральные значения.

Таким образом, уравнение имеет $4 + 1 + 8 = 13$ различных целых решений (относительно x).

Критерии. Сведение задачи к перебору делителей числа 24 — 2 балла.

2. В трапеции $ABCD$ (AD – основание) диагональ AC является биссектрисой угла BAD, угол ACD – прямой. Чему равна площадь трапеции $ABCD$, если площадь треугольника ABC равна 1?

   Решение. Ответ: 3.

   Пусть $\angle BAC = \angle DAC = \alpha$, тогда $\angle BCA = \alpha$ (как накрест лежащий при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Значит, $\triangle\, ABC$ – равнобедренный, $BA = BC$. Кроме того, из суммы углов $\triangle\, ABC$ получаем, что $\angle ABC = 180° - 2\alpha$, а из суммы углов $\triangle\, ADC$ получаем, что $\angle ADC = 90° - \alpha$. Затем продлим прямую CD за точку C до пересечения с продолжением прямой AB за точку B. Пусть K – точка пересечения. В самом деле, прямые пересекутся именно таким образом, так как $\angle BAC < \angle ACD$, а они накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей AC (можно было сказать, что мы отразили $\triangle\, ACD$ относительно прямой AC). Далее заметим, что $\triangle\, BKC$ – равнобедренный, так как $\angle BKC = \angle BCK = 90° - \alpha$. Значит, $BK = BC = BA$. Кроме того, $\triangle AKD$ – равнобедренный, а значит, $AK = AD = 2BC$. Отсюда сразу следует, что площадь $\triangle\, ACD$ в два раза больше площади $\triangle\, ABC$, так как у них одинаковая длина высоты (расстояние между прямыми AD и BC). Таким образом, площадь трапеции $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ACD, а значит, равна утроенной площади треугольника ABC, то есть равна 3.

3. Петя ставит по кругу 100 стаканов, которые могут стоять дном вниз или дном вверх, после чего он больше не трогает стаканы. Вася хочет поставить все стаканы дном вниз. По правилам он имеет право совершать только две операции: перевернуть любые 5 подряд стоящих стаканов или перевернуть 5 подряд идущих стаканов, кроме среднего. Сможет ли Петя помешать Васе осуществить задуманное?

   Решение. Ответ: не сможет.

   Заметим, что последовательное применение двух разрешённых операций к одной и той же пятёрке стаканов меняет положение среднего в пятёрке стакана на противоположное, при этом все остальные стаканы остаются в исходном положении. Поскольку стаканы расположены по кругу, данные операции можно применить к любому стакану. Таким образом, независимо от исходной расстановки стаканов, каждый из них можно поставить в любое из двух положений, а значит, можно и так, чтобы все они стояли дном вниз.

Методическая часть

В некоторых решениях следующих задач есть ошибки. Ошибки могут быть разных типов, перечислим некоторые:

(a) Неверное утверждение (на которое опирается дальнейшее решение).

(b) Неверный переход, упускающий один или несколько случаев.

(c) Необоснованное верное утверждение, которое не так просто доказать (но можно доказать элементарными методами).

(d) Верное рассуждение, требующее более подробного пояснения.

Ошибкой в решениях считается тот дефект, который приводит к снижению баллов. Мы **не просим** вас указать предполагаемое снижение баллов. Мы **просим** вас указать ошибку и максимально чётко обосновать, почему указанное место в решении является ошибкой (т.е. в чём, собственно, ошибка).

- В некоторых из приведённых ниже решений есть *одна* существенная ошибка, которая приводит к максимальному снижению баллов за решение. За указание такой ошибки вы получите 2 балла за задачу.
- При указании и обосновании ошибки, которая привела бы к снижению баллов, но не такому снижению, к которому приводит существенная ошибка, вы получите 1 балл.
- При указании только ошибок, которые не привели бы к снижению баллов, вы получите 0 баллов.
- Жюри оставляет за собой право снизить балл за указание «ошибки», которая на олимпиаде не привела бы к снижению баллов ни при каких обстоятельствах.

4. Можно ли разрезать квадрат 8×8 клеток на 11 различных клетчатых прямоугольников? Все разрезы должны проходить по границам клеток.

Решение ребёнка.

Возьмём самые маленькие площади прямоугольников, тогда их общая площадь будет равна $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 = 67$. Но площадь квадрата 8×8 равна 64. Следовательно мы не сможем разрезать

его на 11 различных прямоугольников.
Ответ: нельзя.

Проверка решения ребёнка. Ошибкой в решении является предположение, что различные прямоугольники имеют разную площадь. В самом деле, например, прямоугольники 1×6 и 2×3 различны, однако, площадь и того и другого равна 6.
Таким образом, получен неверный ответ. Значимых продвижений в решении нет, поэтому оно оценивается в 0 баллов.
Незначительным недочётом является то, что при вычислении общей площади прямоугольников справедливо не был использован прямоугольник с площадью 11. Это легко объясняется тем, что указанной площадью в условиях задачи обладает только прямоугольник 1×11, который, очевидно, не может быть вырезан из квадрата 8×8 клеток.

Правильное решение. Ответ: можно.
На рисунке пример разрезания квадрата 8×8 клеток на 11 различных клетчатых прямоугольников: 1×1, 2×1, 3×1, 4×1, 5×1, 6×1, 3×2, 7×1, 8×1, 5×2, 6×2.

5. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

Решение ребёнка.
Дано:
S – песч.
S – асф.
V_1, V_2 – const
$S_1 = S_2$
Решение:
1) Петя выехал раньше Васи
2) У всех был одинаковый путь ($S_{\text{Пети}} = S_{\text{Васи}}$)
3) Петя и Вася сравнялись в середине $S_{\text{песч}}$ и $S_{\text{асф}}$
4) Учитывая, что они поравнялись ещё и на песчаной дороге, то можно сделать вывод, что независимо от скоростей на асфальтовом участке, $V_{1(\text{Васи на песке})} > V_{2(\text{Пети на песке})}$

Поэтому время, затраченное на всю дорожку, у Васи меньше, чем у Пети.
Ответ: Вася.

Проверка решения ребёнка. Ошибка предлагаемого решения в неверном неравенстве про скорости ребят на песке. Данная ошибка возникает из-за того, что не учитывается часть условия, а именно, что скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной, но при этом не обязательно одинаковой. Более того, если бы скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной (для каждого мальчика своя) и одинаковой на обоих участках, то условие их встречи в серединах каждого из участков не могло быть выполнено. В этом случае Вася догнал бы Петю в середине асфальтового участка, а затем, в силу того, что его скорость, очевидно, больше скорости Пети, уехал бы вперёд, то есть Петя уже не смог бы его догнать.
Также решение предполагает равенство асфальтового и песчаного участков, чего не сказано в условии. Впрочем, это ошибочное предположение не было использовано.
Таким образом, решалась некая другая задача, а предлагаемое решение однозначно оценивается в 0 баллов.

Правильное решение. Ответ: они затратили поровну времени. Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, то есть тоже поровну.

6. Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка?

Решение ребёнка. Заметим, что наименьшее двузначное число, в десятичной записи которого есть 9 – это 19. Также заметим, что мы можем взять максимум одно число, начинающееся на 9. Иначе даже при наименьших числах мы получим $2 \cdot 90 + 7 \cdot 19 = 180 + 133 = 313$, что гораздо больше 240.
Посмотрим на последнюю цифру суммы. Т.к. все числа, кроме числа вида $\overline{9a}$, которое мы можем взять максимум 1 раз, в любом случае заканчиваются на 9 (иначе в их десятичной записи не будет 9), то сумму можно представить как $\overline{a9} \cdot 8 + \overline{bc}$. Её последняя цифра равна (2 + c). Т.к. в итоге мы должны получить 240, а его последняя цифра – 0, то $2 + c \equiv 0 (mod 10)$ (мы смотрим

на остаток от деления на 10, т.к. смотрим последнюю цифру). Отсюда $c = 8$. но так как в числе $\overline{bc}$ $c \neq 9$, то по условию $b = 9$. Тогда перепишем нашу сумму:
$\overline{a9} \cdot 8 + \overline{98} = 240$
$\overline{a9} \cdot 8 = 142$
Но 142 не делится на 8. Значит, $\overline{9a}$ должно быть не целым. Противоречие.
Ответ: нельзя.

Проверка решения ребёнка. Ошибка состоит в предположении, что все допустимые по условию числа, оканчивающиеся на 9, одинаковы. В самом, деле, если допустить, что эти числа различны, то факт итогового противоречия становится недоказанным.
К сожалению, это существенная ошибка, которая не позволяет оценить данное решение выше, чем в 3 балла из 7 возможных.
При этом, противоречие несложно было получить, заметив, что каждое из рассматриваемых слагаемых не меньше 19
В предложенном решении не является ошибкой то, что явно не рассмотрен случай, когда среди этих девяти чисел нет ни одного, начинающегося на 9. Действительно, число $\overline{bc}$ в рассматриваемой сумме может быть числом, оканчивающимся на 9.

Правильное решение. Ответ: нельзя.
Допустим, можно. С девятки должно начинаться хотя бы одно слагаемое, иначе все девятки будут в разряде единиц, и сумма будет оканчиваться на 1. Это слагаемое не меньше 90, а каждое из остальных – не меньше 19. Поэтому их сумма не меньше $90 + 8 \times 19 = 242 > 240$. Противоречие.

7. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18?

Решение ребёнка. Клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, т.к. периметр прямоугольника находим по формуле $(a + b) \cdot 2$, где a – длина, b – ширина, следовательно, т.к. у нас квадрат, может быть 4 варианта длины и ширины (если мы поменяем значения длины и ширины местами, при квадрате это не будет иметь значения).
Рассмотрим варианты суммы a + b:
$18 = (a + b) \cdot 2$, следовательно $a + b = 9$
$a + b$ может быть: 8 + 1, 7 + 2, 6 + 3, 5 + 4
Чтобы разрезать квадрат 25×25 нам нужно брать прямоугольники (квад-

раты) 5×5, т.к. при других вариантах у нас всегда будут оставаться лишние клетки.
Ответ: нельзя так разрезать.

Проверка решения ребёнка. Основной ошибкой предложенного решения является сведение решения задачи к рассмотрению частного случая разрезания на квадраты 5×5. Кроме того, если понимать это утверждение, как попытку разрезать квадрат 25×25 без условия на периметры получающихся прямоугольников, то существует много других вариантов разрезания, например, можно разрезать на квадраты 1×1.
Так как иные продвижения в решении несущественны, то предлагаемое решение оценивается в 0 баллов.
Менее существенным недочётом является то, что явно не указано, в чём состоит противоречие.

Правильное решение. Ответ: нельзя.
Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметр прямоугольника равен 18, то сумма длины и ширины равна 9. Это означает, что одна из этих величин – чётное число, а другая – нечётное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечётному. Противоречие.

8. По кругу выписано 101 число. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

Решение ребёнка. Если в последовательности из 5 чисел минимум 2 положительные, то с 1 по 100 число : $\frac{100}{5}\cdot 2 = 40$ положительных.
Рассмотрим 101-е число. Если оно неположительное, то в любом случае получится ряд из 5 чисел с 1 положительным. Значит, 101-е число положительно. Значит, из 101 числа как минимум 41 положительных.
Ответ: 41.

Проверка решения ребёнка. В предлагаемом решении утверждается, но не доказано, что если 101-е число не положительное, то найдётся пятёрка подряд идущих чисел только с одним положительным числом, что будет противоречить условию. Поскольку это утверждение предполагало объяснение оценки количества положительных чисел, то отсутствие его доказательства является самой существенной ошибкой.

Тоже важной, но менее существенной ошибкой является отсутствие примера, подтверждающего приведённую оценку.

Таким образом, в предложенном решении отсутствуют оба ключевых элемента доказательства.

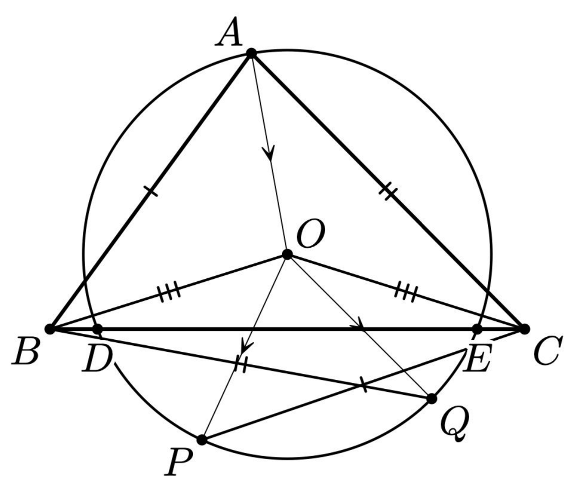
Критерии. Замечено, что в решении отсутствует пример – 1 балл.

Правильное решение. Ответ: 41.

Рассмотрим любые 5 подряд идущих чисел. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 100 разобьем на 20 пятёрок подряд идущих. В каждой такой пятёрке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1 + 2 \cdot 20 = 41$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами $1, 3, 6, 8, 11, \ldots, 98, 101$.

9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE, не содержащей точку A, нашлись такие точки P и Q, что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.

Решение ребёнка.



Без ограничения общности будем считать, что точка D лежит на отрезке BE. Пусть O — центр окружности (ADE). Заметим, что $OB = OC$. Треугольники OAB и OPC равны по трем сторонам, треугольники OAC и OQB — тоже.

Тогда

$$\angle ABQ = \angle ABO + \angle OBQ = \angle PCO + \angle OCA = \angle PCA.$$

Поэтому треугольники ABQ и PCA равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $AP = AQ$.

Проверка решения ребёнка. Существенным недочётом предложенного решения является отсутствие объяснения геометрической конфигурации, представленной на рисунке, а именно, не исключена возможность нахождения точки O снаружи треугольника ABC, из-за чего предложенное вычисление угла ABQ оказалось бы некорректным.

Покажем, что точка O даже не может находиться не внутри треугольника ADE. Предположим обратное. Тогда треугольник ADE – не остроугольный. Пусть, например, $\angle AED$ – не острый. Тогда, так как $\angle DAE < \angle BAC$, то $\angle DAE$ – острый, значит, $\angle DPC > \angle DPE = 180° - \angle DAE$, то есть $\angle DPC$ – тупой, следовательно $PC < CD$. Но $CD = BE$, так как $BD = CE$, а $BE < AB$, так как AB – сторона, лежащая напротив неострого угла в треугольнике ABE. То есть мы получили $PC < AB$, что противоречит условию.

Аналогично доказывается, что $\angle ADE$ не может быть не острым.

Данный недочёт влечёт снятие не менее двух баллов из семи.

Незначительным недочётом является отсутствие объяснения, почему точки A и O лежат по одну сторону от прямой BC, что почти сразу следует из того, что $\angle DAE$ – острый.

Также незначительным недочётом является отсутствие объяснения факта $OB = OC$, что, впрочем, легко получить из равенства треугольников OBD и OCE ($BD = CE$ по условию, $OD = OE$ и равенство углов ODB и OEC следует из равнобедренности треугольника ODE).

Правильное решение. Одним из вариантов правильного решения как раз может быть предложенное решение с устранёнными недочётами.