Подмосковная олимпиада учителей 2021-2022. 1 тур.

24 апреля 2022г.

1. Решите уравнение $1 - (2 - ((3 - (...2020 - (2021 - x))...))) = 1011$.

   Решение. Ответ: $x = 0$.
   Раскрывая скобки, получим уравнение, в котором в левой части находится выражение с чередующимися знаками $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 2019 - 2020 + 2021 - x = 1011$. То есть каждое нечётное число прибавляется, а каждое чётное – вычитается. Запишем это уравнение в следующем виде $(1-2)+(3-4)+(5-6)+...+(2019-2020)+2021-x = 1011$. Разность чисел в каждой из 1010 скобок равна -1. Таким образом, $-1010+2021-x = 1011$. То есть $x = 0$.

2. Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $n - 1$ и получили 2022. Найдите это число.

   Решение. Ответ: 1011.
   $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, Тогда число n может принимать следующие значения: $1,\ 2,\ 3,\ 2 \cdot 3,\ 337,\ 2 \cdot 337,\ 3 \cdot 337,\ 2 \cdot 3 \cdot 337$. Проверяя эти значения, получаем, что подходит только $n = 3 \cdot 337 = 1011$. То есть $n - 1 = 1010$ и сумма его цифр равна 2.

3. На Подмосковной олимпиаде школьников по математике 2021 года, Сережа заметил, что 9 декабря 2021 года можно кратко записать 9.12.21. Сумма этих чисел $9 + 12 + 21 = 42$. Сумма чисел даты рождения Сережи, записанных в таком же виде, тоже равна 42. Когда у Сережи день рождения, если сейчас ему 12 лет и день рождения он празднует зимой?

   Решение. Ответ: 21.12.09 или 31.01.10.
   Если сейчас, то есть 24.04.2022 года, Серёже 12 лет, то он мог родиться в любой из дней с 25.04.2009 года по 24.04.2010 года. Но так как по условию его день рождения зимой, то существует три варианта. Если его день рождения в декабре 2009 года, то его можно записать в виде x.12.09, откуда $x = 42 - 12 - 9 = 21$, то есть день рождения 21.12.09. Если его день рождения в январе 2010 года, то его можно записать в виде x.01.10, откуда $x = 42 - 1 - 10 = 31$, то есть день рождения 31.01.10. Если его день рождения в феврале 2010 года, то его можно записать в виде x.02.10, откуда $x = 42 - 2 - 10 = 30$, но даты 30.02.10 не существует. Значит возможны два варианта 21.12.09 или 31.01.10.

4. Мягкая игрушка “пятнистый колобок” сшита из 42 кусочков ткани – жёл-

тых восьмиугольников и красных треугольников. Каждый красный кусок ткани сшит только с жёлтыми, а каждый жёлтый — с четырьмя красными и четырьмя жёлтыми, причём все куски сшиты строго сторона со стороной. Сколько жёлтых кусочков ткани?

Решение. Ответ: 18.

Пусть x – число жёлтых кусочков. Тогда $42-x$ – число красных. Посчитаем количество границ жёлтых восьмиугольников с красными треугольниками. Каждый восьмиугольник граничит с четырьмя треугольниками, а каждый треугольник граничит с тремя восьмиугольниками. То есть $4\cdot x = 3\cdot(42-x)$. Решая это уравнение, находим, что $x = 18$.

5. Петя написал на доске натуральное число n. Оказалось, что $6n = a^2$, а $15n = b^3$, где a и b - некоторые натуральные числа. Какое наименьшее число мог написать Петя?

   Решение. Ответ: 48600.

   Из первого равенства следует, что числа 2 и 3 входят в разложение числа n на простые числа в нечётной степени. Все остальные простые числа должны входить в разложение в чётной степени (в том числе и в нулевой). Из второго равенства следует, что числа 3 и 5 входят в разложение числа n на простые числа в степени, имеющей остаток 2 при делении на 3. Все остальные простые числа должны входить в разложение в степени кратной 3 (в том числе и в нулевой). Натуральное число n тем меньше, чем меньше степени простых чисел в его разложении. Тогда минимальная степень числа 2 – это 3 (нечётная и кратная 3), минимальная степень числа 3 – это 5 (нечётная и имеющая остаток 2 при делении на 3), минимальная степень числа 5 – это 2 (чётная и имеющая остаток 2 при делении на 3). Таким образом наименьшее значение числа n равно $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 = 48600$.

6. Первый сплав меди и алюминия содержит эти металлы в указанном порядке в соотношении $7 : 8$ по массе. Второй сплав этих металлов содержит их в том же порядке в соотношении $2 : 3$. В каком отношении надо взять массы этих двух сплавов ((масса 1 сплава):(масса 2 сплава)), чтобы получить новый сплав, в котором соотношение меди и алюминия будет $3 : 4$? Ответ дайте в виде десятичной дроби, выражающей указанное соотношение. При необходимости округлите до сотых.

   Решение. Ответ: 0,75.

   Пусть $15x$ – масса первого сплава, $5y$ – масса второго сплава. Тогда для нового сплава с соотношением меди и алюминия $3 : 4$ будет выполняться равенство $\frac{7x+2y}{8x+3y} = \frac{3}{4}$, откуда получаем $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$. Искомое отношение масс двух сплавов будет равно $\frac{15x}{5y} = \frac{3}{4} = 0,75$.

7. В трапеции $ABCD(BC||AD, BC < AD)$ на боковых сторонах AB и CD отметили соответственно точки M и N так, что $MN||AD$. Оказалось, что площади $AMND$ и $MBCN$ относятся как $2:1$. Найдите MN, если $BC = 1$, $AD = 19$.

   Решение. Ответ: 11.
   Продлим прямые AB и DC до пересечения в точке F. Рассмотрим подобные треугольники FAD и FBC. Пусть при этом S' - площадь треугольника FBC, обозначим также через S - площадь $MBCN$, тогда $2S$ - площадь $AMND$. Воспользуемся тем, что $\frac{S_{\triangle FAD}}{S_{\triangle FBC}} = \frac{3S+S'}{S'} = (\frac{19}{1})^2$. Откуда получаем, что $\frac{S}{S'} = 120$. Затем рассмотрим подобные треугольники FMN и FBC. Снова воспользуемся отношением площадей, то есть $\frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle FBC}} = \frac{S+S'}{S'} = \frac{S}{S'} + 1 = (\frac{MN}{1})^2$. Подставляя в это уравнение значение $\frac{S}{S'} = 120$, получим $MN = 11$.

8. Функция $f(x) = x^2 + px + q$ принимает только неотрицательные значения. Найдите наименьшее значение выражения $p + q$.

   Решение. Ответ: -1.
   Из того, что $f(x)$ принимает только неотрицательные значения, следует, что $D = p^2 - 4q \leq 0$. Откуда $q \geq \frac{p^2}{4}$, то есть $p + q \geq \frac{p^2}{4} + p = (\frac{p}{2} + 1)^2 - 1 \geq -1$. Таким образом, наименьшее значение выражения $p + q$ равно -1, и это значение достигается при $p = -2$, $q = 1$.
   Замечание. Искомое значение можно было получить иначе, заметив, что $f(1) \geq 0$.

9. Найдите наименьшее положительное значение $sin(2x + 2y)$, если $(1 + tgx)(1 + tgy) = 2$.

   Решение. Ответ: 1.
   Раскроем скобки уравнения $(1+tgx)(1+tgy) = 2$, а затем умножим обе его части на $cosx \cdot cosy \neq 0$. Получим $sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny = cosx \cdot cosy - sinx \cdot siny$, то есть $sin(x+y) = cos(x+y)$ или $tg(x+y) = 1$. Воспользуемся тем, что $tg^2(x + y) + 1 = \frac{1}{cos^2(x+y)}$, откуда $cos^2(x + y) = \frac{1}{2}$. Тогда $cos(2x + 2y) = 2cos^2(x + y) - 1 = 0$. По основному тригонометрическому тождеству и с учётом того, что требуется найти наименьшее положительное значение, получаем $sin(2x + 2y) = 1$.

10. В выпуклом пятиугольнике $PQRST$ известно, что $PT = PS$, $PR = PQ$ и $\angle SPR = \angle PTQ + \angle PQT$. Кроме того, $SR = 9$. Найдите длину медианы PM треугольника PQT.

Решение. Ответ: 4,5.

Отложим на продолжении медианы PM отрезок MN, равный PM. Тогда PQNT – параллелограмм. Откуда получаем $QN = PT$, $\angle MQN = \angle PTQ$. Далее $QN = PT = PS$, $PQ = PR$, $\angle PQN = \angle SPR$. То есть $\triangle PQN = \triangle RPS$. Значит $PN = SR = 9$, $PM = \frac{1}{2}PN = 4,5$.

11. На бесконечной шахматной доске некоторые клетки перекрашены в красный цвет. На всех остальных клетках написано, за какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти из неё до красной клетки. Из доски вырезали прямоугольник 3×2 по границам клеток, не содержащий красных клеток. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в этом прямоугольнике?

Решение. Ответ: 4.

От любой клетки до соседней с ней можно дойти за три хода коня. Значит, числа, написанные в соседних клетках, различаются не более чем на 3. Более того, от клетки до клетки, расположенной через одну от нее, или клетки, соседней по диагонали, можно до браться за два хода коня. Значит, числа, написанные в этих клетках различаются не более чем на 2. Таким образом, все числа в прямоугольнике 2×3 отличаются друг от друга не более чем на 3. Но если в нем есть хотя бы пять различных чисел, то самое большое от самого маленького отличается хотя бы на 4. Противоречие. Следовательно, наибольшее количество различных чисел – 4. Примеров строится бесчисленное множество.

12. В государстве А есть 100 городов и в государстве В есть 100 городов. Каждый город государства А соединен дорогой с каким-нибудь городом государства В, и наоборот, каждый город государства В соединен дорогой с каким-нибудь городом государства А. Известно, что для каждого города государства А из всех дорог, ведущих в государство В, по крайней мере две трети ведут в его областные города. А для каждого города государства В из всех дорог, ведущих в государство А, по крайней мере половина ведёт в его областные города. Какое наименьшее количество областных городов может быть в государстве А, если в государстве В их 10.

Примечание: каждая дорога соединяет ровно два разных города.

Решение. Ответ: 18.

Назовём обычным любой город, не являющийся областным. Тогда из каждого обычного города государства В ведёт хотя бы одна дорога в областной город государства А. Имеется 90 обычных городов в В. Тогда из каждого областного города А ведёт не более 5 дорог к обычным городам В, так как по крайней мере две трети дорог ведут в его областные города, то есть не более, чем 10. Значит, областных городов в государстве А не менее, чем $\frac{90}{5} = 18$.

Покажем, что если в государстве А есть 18 областных городов, то все условия выполняются. Пусть каждый из этих 18 областных городов соединён дорогой с каждым из 10 областных городов государства В и с пятью обычными городами В, причём эти 5 обычных городов В разные для каждого областного города А. Обычные города государства А соединены только с областными городами государства В. Каждый областной город государства В соединён дорогой с каждым из 18 областных городов государства А и с группой из не более, чем 18 обычных городов из А, причём эти группы состоят из разных городов государства А для каждого областного города В. (Очевидно, что можно предъявить 10 таких групп, ведь обычных городов в А будет 82). И, наконец, пусть каждый обычный город государства В соединён только с одним областным городом государства А. Несложно заметить, что все условия задачи при этом выполняются.