Телепроект «МОЯ ШКОЛА в online»

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

МАТЕМАТИКА ПРОФИЛЬ

11 класс

Урок №25

Решение тригонометрических уравнений

Васянин Сергей Иванович,
учитель математики
Лицей «Вторая школа»

Что мы сегодня будем изучать?

Основные определения, формулы тригонометрии. Основные методы и подходы к решению тригонометрических уравнений. Задание 13 из профильного ЕГЭ.

Определения

- **Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\sin\alpha$. Угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.**
- **Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α. Обозначается $\cos\alpha$. Угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.**
- **Тангенсом угла α называется отношение $sin\,\alpha$ к $cos\,\alpha$. Обозначается $tg\,\alpha$. Угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.**
- **Котангенсом угла α называется отношение $cos\,\alpha$ к $sin\,\alpha$. Обозначается $ctg\,\alpha$. Угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.**
- **Арксинусом числа *m* $(|m| \le 1)$ называется такое число α, что $sin\,\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Арксинус числа *m* обозначают: $arcsin\,m$.**
- **Арккосинусом числа *m* $(|m| \le 1)$ называется такое число α, что $cos\,\alpha = m$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Арккосинус числа *m* обозначают: $arccos\,m$.**
- **Арктангенсом числа *m* называется такое число α, что $tg\,\alpha = m$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Арктангенс числа *m* обозначают: $arctg\,m$.**
- **Арккотангенсом числа *m* называется такое число α, что $\mathrm{ctg}\,\alpha = m$ и $0 < \alpha < \pi$. Арккотангенс числа *m* обозначают: $arcctg\,m$.**

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2\, ctg\, \alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

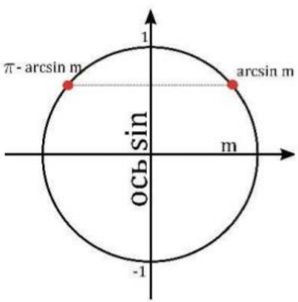
Формулы приведения

Функция	Аргумент β						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Решение простейших тригонометрических уравнений - 1

Уравнение	Условие	Ответ
$\sin x = m$	$\lvert m\rvert > 1$	$\emptyset$
	$m = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$m = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$\lvert m\rvert < 1$	$\left[\begin{array}{l} x = \text{arsin}\, m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin m + 2\pi \text{k}, \text{k} \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ или $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение на тригонометрической окружности

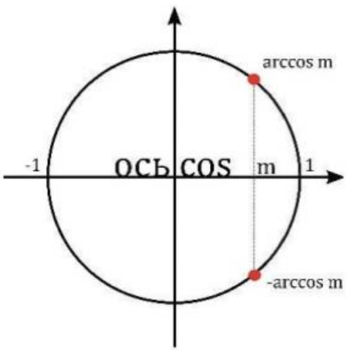


Ось $\sin$ **– отрезок** $[-1; 1]$ оси ординат, на нем отмечают m и получают соответствующее решение уравнения $\sin x = m$ на окружности

Решение простейших тригонометрических уравнений - 2

Уравнение	Условие	Ответ
$\cos x = m$	$\|m\| > 1$	$\emptyset$
	$m = 1$	$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$m = -1$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
	$\|m\| < 1$	$x = \pm \arccos m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решение на тригонометрической окружности



Ось cos – отрезок $[-1; 1]$ оси абсцисс, на нем отмечают m и получают соответствующие решение уравнения $\cos x = m$ на окружности.

Задание № 1

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75.$

б) Найдите все корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Задание № 2

а) Решите уравнение $\mathbf{\sin 2x = \sqrt{3}\sin(\frac{3\pi}{2} - x)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $[\mathbf{3\pi; 4\pi}]$

Задание № 3

а) Решите уравнение

$$\mathbf{2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0.}$$

б) Найдите корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$

Задание № 4

а) Решите уравнение $\mathbf{4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

Задание № 5

а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

б) Укажите корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Задание № 6

а) Решите уравнение $\mathbf{\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Задание № 7

а) Решите уравнение $\mathbf{2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Материалы, рекомендованные к самостоятельному повторению

1) Открытый банк заданий ЕГЭ

2) Образовательный портал
«СДАМ ГИА. Решу ЕГЭ»

3) Книги и пособия по профильной математике под редакцией И.В. Ященко и А.В. Семенова