Подмосковная Олимпиада

Условия и решения

7-8 класс *Январь 2021*

---

1. Две звезды 8 баллов

Звезда Процион состоит из двух компонент: звезды главной последовательности Процион A и белого карлика Процион B массами 1.5 и 0.6 масс Солнца соответственно. Расстояние между Проционом A и Проционом B равно 14 а.е. Будем считать их орбиты круговыми и лежащими в одной плоскости. Так же представим, что вокруг звезды Процион A по круговой орбите на расстоянии 3 а.е. вращается планета. Ответьте на следующие вопросы:

1. Каков период вращения планеты вокруг Проциона A?
2. Каков период между моментами противостояния, когда планета оказывается между Проционом A и Проционом B?
3. Во сколько раз максимальное расстояние между планетой и Проционом B больше, чем минимальное расстояние между ними?

Решение. Период планеты вокруг Проциона A найдем через уточненный 3-й закон Кеплера, сравнив с системой Солнце-Земля:

$$\frac{T^2 M_A}{T_\oplus^2 M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}.$$

Выразим период планеты

$$T = T_\oplus \left(\frac{M_A}{M_\odot}\right)^{-0.5} \left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^{1.5} = \boxed{4.24 \text{ года}}$$

Период между противостояниями, есть синодический период Проциона B для планеты, вращающейся вокруг Проциона A (случай внешней планеты). Сначала найдем период Проциона B:

$$\frac{T_B^2 (M_A + M_B)}{T_\oplus^2 M_\odot} = \frac{a_{AB}^3}{a_\oplus^3}.$$

После подстановки значений

$$T_B = \boxed{36.15 \text{ года}}$$

Тогда синодический период для конфигурации, когда планета вращается вокруг звезды А в том же направлении, что и звезда В, можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_B}.$$

Отсюда

$$S = \frac{T \cdot T_B}{T_B - T} = \frac{36.15 \cdot 4.24}{36.15 - 4.24} = \boxed{4.8 \text{ года}}$$

Осталось рассмотреть случай, когда планета вращается в другую сторону. Тогда запись синодического уравнения будет иметь знак плюс вместо минуса:

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_B}.$$

Отсюда,

$$S_2 = \frac{T \cdot T_B}{T_B + T} = \frac{36.15 \cdot 4.24}{36.15 + 4.24} = \boxed{3.8 \text{ года}}$$

Теперь ответим на последний вопрос задачи. Во сколько раз максимальное расстояние между планетой и Проционом В больше, чем минимальное расстояние между ними?

Для этого определим максимальное и минимальное расстояние между планетой и звездой Процион В:

$$r_{max} = 14 + 3 = 17 \text{ а.е.}$$

а минимальное расстояние

$$r_{min} = 14 - 3 = 11 \text{ а.е.}$$

Тогда искомое нами соотношение

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{17}{11} = \boxed{1.55}$$

Критерии оценивания **8**

Период планеты (через уточненный III закон Кеплера) 2
Периода обращения звезд вокруг центра масс 1
Два синодических периода (по 2 балла за случай) 4
Соотношение расстояний 1

2. Полёт в зените 8 баллов

В некотором пункте А на Земле МКС пролетает через зенит. Считая орбиту станции круговой, высоту полета станции равной 400 км, а также не учитывая вращение Земли, найдите следующие параметры:

1. Скорость движения МКС по орбите.
2. В течение какого времени МКС будет видно из упомянутого географического пункта?
3. Высоту над горизонтом, где МКС будет иметь наибольшую видимую скорость движения по небу.

Орбиту МКС считайте круговой.

Решение. Для начала найдем радиус орбиты МКС

$$a = h + R_{♁} = 6800 \text{ км},$$

где $R_{♁}$ - радиус Земли. Теперь по III закону Кеплера сравним движение МКС с движением Луны:

$$\frac{T^2}{T^2_{☾}} = \frac{a^3}{a^3_{☾}}.$$

Из этого уравнения найдем орбитальный период МКС:

$$T = T_{☾}\sqrt{\frac{a^3}{a^3_{☾}}} = 5\,550 \text{ с}.$$

Через формулу длины окружности найдем длину пути, который МКС проходит за один орбитальный период:

$$L = 2\pi a = 42730 \text{ км}.$$

Найдем скорость движения по орбите из отношения пройденного расстояния к времени движения:

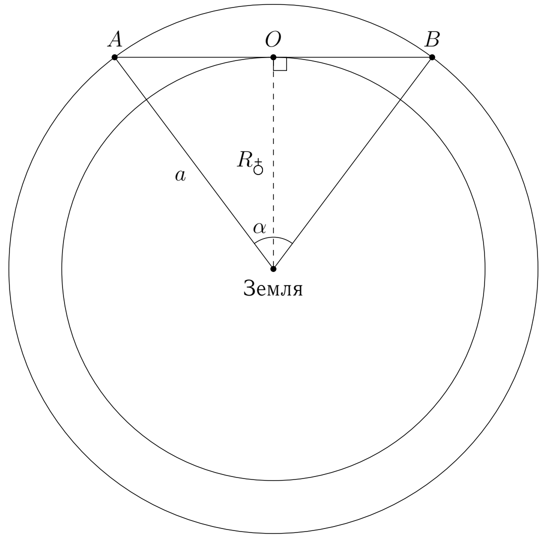
$$v = \frac{L}{T} \approx \boxed{7.7 \text{ км/с}}$$

Альтернативное решение. Зная радиус орбиты $a = 6800$ км используем формулу первой космической скорости и найдем скорость движения МКС по орбите:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx \boxed{7.7 \text{ км/с}}$$

где $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$ — гравитационная постоянная, $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг — масса Земли.

Изобразим ситуацию, описанную в пункте 2 условия:
Точки А и В - точки захода и восхода МКС соответственно. За весь сеанс видимости из



точки О, в которой находится наблюдатель, станция проходит угол α, который можно найти их прямоугольного треугольника:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R_{\oplus}}{a},$$

следовательно

$$\alpha = 2\arccos\frac{R_{\oplus}}{a} \approx 39.5^\circ,$$

теперь составим пропорцию:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t_{AB}}{T},$$

где t_{AB} — искомое время видимости.

$$t_{AB} = T\cdot\frac{\alpha}{360^\circ} \approx 609 \text{ с} = \boxed{10.1 \text{ мин}}$$

Максимальная видимая скорость движения по небу станции достигается при наименьшем расстоянии до нее от наблюдателя. Как видно из рисунка, на минимальном расстоянии МКС проходит $\boxed{\text{в зените}}$, то есть на высоте $\boxed{h = 90^\circ}$

Критерии оценивания **8**

Скорость движения МКС 2

Длительность наблюдения 4

Геометрическая модель *2*

Ответ *2*

Максимальная скорость 2

Утверждение, что необходимо минимальное расстояние *1*

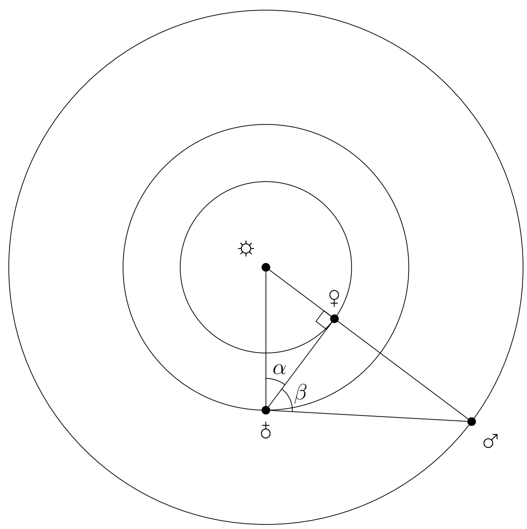
Утверждение, что минимальное расстояние в зените............*1*

3. Три планеты 8 баллов

22 марта со спутника Венеры Земля наблюдается в восточной квадратуре, а Марс — в противостоянии с Солнцем. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости (плоскости эклиптики). Выполните следующие задания:

1. Нарисуйте схему взаимного положения этих планет.
2. Какие взаимные расстояние (в астрономических единицах) разделяют Венеру, Землю и Марс?
3. Каковы условия видимости (время суток и созвездия, в которых наблюдаются планеты) Марса и Венеры на Земле?
4. Определите фазы Марса и Венеры для наблюдателя с Земли. Как будет меняться значение фазы в течении ближайшего месяца?

Решение. Искомое положение планет изображено на рисунке.



На втором этапе решения задачи найдем расстояния между планета. Рассмотрим треугольник Солнце-Венера-Земля (△☼♀♁). Он прямоугольный, так как Земля находится в восточной квадратуре. Значит расстояние между Землей и Венерой можно найти из теоремы Пифагора

$$\text{♁♀} = \sqrt{a_{\text{♁}}^2 - a_{\text{♀}}^2} = \boxed{0.69\ \text{а.е.}}$$

Для нахождение расстояния Венера-Марс обратим внимание, что эти две планеты и Солнце лежат на одной прямой. Тогда

$$\text{♀♂} = 1.52 - 0.72 = \boxed{0.8\ \text{а.е.}}$$

Для нахождения расстояния Земля-Марс, обратим внимание, что треугольник Венера-Марс-Земля прямоугольный. Тогда

$$\text{♁♂} = \sqrt{\text{♁♀}^2 + \text{♀♂}^2} = \boxed{1.06\ \text{а.е.}}$$

На третьем этапе определимся с условиями видимости Марса и Венеры для наблюдателя с Земли. Для этого необходимо найти углы $\angle\text{☼♁♀}$ (α) и $\angle\text{☼♁♂}$ ($\alpha+\beta$). В первом случае рассматриваем треугольник $\triangle\text{☼♁♀}$ — он прямоугольный. В нем $\tan\alpha = \frac{0.69}{0.72}$. Следовательно угол α равен $45.4^\circ = 3^h2^m$. Для наблюдателя с Земли Венера находится в западной элонгации (напоминаем, что Земля в восточной квадратуре), а значит она видна по утрам. Итоговый ответ — *Венера видна по утрам, и она встает за 3 часа до восхода Солнца.*

В треугольнике $\triangle\text{♀♁♂}$ можем записать, что $\sin\beta = \frac{0.8}{1.06}$, значит угол $\beta = 49^\circ = 3^h16^m$. Тогда угол $\angle\text{☼♁♂} = \alpha+\beta = 94^\circ = 6^h18^m$. То есть Марс находится вблизи западной квадратуры. Итоговый ответ — *Марс восходит за 6 часов 18 минут до Солнца и удобен для наблюдения по утрам на востоке.*

Определим, в каких созвездия наблюдатель с Земли может увидеть Венеру и Марс. 22 марта Солнце находится в Рыбах. Венера находится на 45.4° западнее Солнца и будет видна в *Козероге*, Марс находится в 94° западнее Солнца и будет виден в *Стрельце*.

Перейдем к последнему пункту задачи. Для определения фаз планет необходимо знать фазовый угол, или угол Солнце-Планета-Наблюдатель(Земля). В треугольнике $\triangle\text{☼♁♀}$ угол $\angle\text{☼♀♁} = 90^\circ$. Это значение также можно было получить из условия, что Венера находится в элонгации. Тогда фаза Венеры

$$\Phi_{\text{♀}} = \frac{1+\cos\angle\text{☼♀♁}}{2} = \boxed{0.5}$$

Для Марса фазовый угол из $\triangle\text{♀♁♂}$ $\angle\text{☼♂♁} = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$. Тогда фаза Марса

$$\Phi_{\text{♂}} = \frac{1+\cos\angle\text{☼♂♁}}{2} = \boxed{0.88}$$

Как будут меняться фазы планет в течении ближайшего месяца? Венера — внутренняя планета, она двигается быстрее, чем Земля и после западной квадратуры будет двигаться в сторону верхнего соединения. Значит *фаза Венеры будет увеличиваться*. Марс — внешняя планета. Сейчас он находится в вблизи западной квадратуры, но её он уже прошел и будет двигаться в сторону противостояния. Следовательно, *фаза Марса будет увеличиваться*.

Критерии оценивания **8**

Верный рисунок взаимного положения планет 1
Определенние расстояний (по баллу за каждый ответ) 3
Определение условий видимости (по баллу за каждый ответ) 2
Определение фаз (по баллу за каждую планету) 2
Значение фазы (по 0.5 балла за планету) *1*
Указание, как фаза будет меняться (по 0.5 балла за планету) . . *1*

4. Терминатор

8 баллов

В результате вращения Луны вокруг своей оси и вокруг Земли граница дня и ночи (терминатор) движется по поверхности Луны. Определите:

1. Протяженность этой границы (терминатора).
2. Скорость движения терминатора по поверхности на экваторе Луны
3. Время, за которое терминатор проходит видимую для человека ростом 1.8 м область горизонта по поверхности на экваторе Луны.

Решение. Граница дня и ночи или терминатор, это большой круг, перпендикулярный направлению на Солнце. Его длина составляет

$$L = 2\pi R_{☾} = 2\pi \cdot 1740 \text{ км} = \boxed{10\,927 \text{ км}}$$

Во втором пункте найдем скорость движения терминатора. Для этого длину экватора Луны необходимо поделить на солнечные сутки на Луне, а они равны синодическому периоду Луны (29.5 дней).

$$v = \frac{2\pi R_{☾}}{S} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 1\ 740 \text{ км}}{29.5 \text{ дней}} = \boxed{4.32 \text{ м/с}}$$

Для нахождения времени, за которое терминатор проходит видимую для человека область горизонта мы уже знаем скорость движения терминатора $v = 4.32$ м/с. Расстояние до горизонта для наблюдателя на Луне равно $L = \sqrt{2hR_{☾}} = 2\ 500$ м.

Но, важно помнить, что терминатор обладает не нулевой шириной. Ширина терминатора — это часть поверхности Луны, где сейчас восходит или заходит Солнце, а поскольку Солнце обладает не нулевым угловым размером, то и терминатор обладает не нулевой толщиной. Найдем эту толщину. Угловой размер Солнца для наблюдателя с Луны такой же, как и для наблюдателя с Земли, и равен 0.5°. Следовательно, на экваторе Луны ширина терминатора составит $0.5^\circ/360^\circ = 1/720$ от его длины.

$$\Delta = \frac{2\pi R_{☾}}{720} = \boxed{15.2 \text{ км}}$$

Значит искомое время $t = (2L + \Delta)/v = \boxed{4\,676 \text{ сек} = 77^m 46^s}$

Критерии оценивания **8**

Определение длины границы дня и ночи 2

Определение скорости движения терминатора 2

Взят сидерический (27.2 дня) период вместо синодического *0*

Определение времени прохождения 4

Дальность горизонта *1*

Ширина терминатора *1*

Модель и получение ответа *2*

5. Кульминации Альтаира

8 баллов

Зенитное расстояние звезды Альтаир ($\delta = +09^\circ$) в верхней кульминации равно модулю ее высоты в нижней кульминации. Ответьте на следующие вопросы:

1. Чему равна широта места наблюдения?
2. Чему равна высота звезды в верхней кульминации?
3. Над или под горизонтом расположена звезда в момент нижней кульминации?

Решение. Рассмотрим случай с северным полушарием. Зенитное расстояние z звезды можно вычислить так:

$$z = 90^\circ - h_{hc} = 90^\circ - (90^\circ - |\varphi - \delta|) = |\varphi - \delta|$$

Модуль высоты звезды в нижней кульминации $|h_{dc}|$ равен:

$$|h_{dc}| = |\varphi - 90^\circ + \delta|$$

Теперь перепишем уравнение из условия:

$$|\varphi - \delta| = |\varphi - 90^\circ + \delta|$$

Подставив склонение Альтаира, получим:

$$|\varphi - 9^\circ| = |\varphi - 81^\circ|$$

Очевидно, что для $\varphi \in (81^\circ; 90) \cup (0; 9^\circ)$ уравнение не имеет корней. Тогда, уравнение приобретает вид:

$$\varphi - 9^\circ = -\varphi + 81^\circ$$

$$\varphi_1 = 45^\circ$$

Очевидно, решение симметрично для южного полушария, получаем ответ для широт:

$$\varphi = \boxed{\pm 45^\circ}$$

Такой же ответ можно получить, поняв, что нижняя и верхняя кульминации симметричны относительно оси мира, а расстояние от верхней кульминации до зенита равно расстоянию от нижней кульминации до горизонта. Вспомнив, что расстояние между нижней и верхней кульминаций у Альтаира больше 90°, становится очевидно, что горизонт и ось мира должны быть также симметричны относительно оси мира, а значит модуль широты равен 45°.

Теперь найдем 2 варианта для высоты звезды в верхней кульминации $h_{hc1,2}$:

$$h_{hc1} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - 45^\circ + 9^\circ = \boxed{54^\circ}$$

$$h_{hc2} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - 45^\circ - 9^\circ = \boxed{36^\circ}$$

Чтобы определить, где происходила нижняя кульминация, найдём 2 варианта для её значения:

$$h_{dc1} = \varphi - 90 + \delta = \boxed{-36^\circ}$$

$$h_{dc1} = \varphi - 90 + \delta = \boxed{-54^\circ}$$

Получаем, что нижняя кульминация в обоих случаях под горизонтом.

Критерии оценивания	**8**
Нахождение широты	4
Северное полушарие *3*	
Южное полушарие *1*	
Высота верхней кульминации (по баллу за случай)	2
Высота нижней кульминации (по баллу за случай)	2

6. Астероид 10 баллов

Ниже приведена таблица с данными о положении астероида в разные моменты времени (Δ — расстояние между Землей и астероидом, γ — угол Солнце-Земля-астероид). Орбита астероида лежит в плоскости эклиптики. В данном случае положительный угол отсчитывается по часовой стрелке от направления Земля–Солнце, отрицательный — против.

1. Какое направление движения этого астероида: прямое или попятное?
2. На бланке с миллиметровой бумагой сделайте рисунок, изображающий орбиту Земли и положения Земли и астероида в каждый из моментов времени, указанных в таблице. По полученным положениям астероида восстановите его орбиту. Орбиту Земли считайте круговой.
3. Найдите большую полуось орбиты астероида и период его обращения вокруг Солнца.

Решение. Оптимальным методом решения этой задачи является построение двух орбит. Орбиты Земли (мы знаем, что она круговая и ее радиус равен 1 а.е.) и орбиты астроида. Из этого графика видно, что *движение прямое*, то есть в ту же сторону, что и у Земли вокруг Солнца.

Существует также аналитический способ определения полуоси орбиты. Посчитаем для каждой точки расстояние r от Солнца до астероида. Пусть $a_{\oplus}$ — радиус орбиты Земли. По теореме косинусов:

$$r = \sqrt{\Delta^2 + a_{\oplus}^2 - 2a_{\oplus}\Delta cos(\gamma)}$$

Результаты вычислений занесем в таблицу:

Дата	Δ, а.е.	$\gamma,^\circ$	r, а.е.
21.01.21	2.7240	155.82	3.6593
21.02.21	3.0079	123.75	3.6592
21.03.21	3.4066	96.608	3.6591
21.04.21	3.8575	71.172	3.6593
21.05.21	4.2380	48.914	3.6593
21.06.21	4.5183	23.380	3.6222
21.07.21	4.6491	7.2528	3.6593
21.08.21	4.6249	-13.352	3.6592
21.09.21	4.4414	-34.319	3.6592
21.10.21	4.1312	-55.524	3.6592
21.11.21	3.7126	-79.191	3.6594
21.12.21	3.2738	-104.78	3.6590

Видим, что расстояние от Солнца до астероида почти не меняется, значит можно считать ее круговой. Усредним эти значения, получим, что $r = 3.656$ а.е. Запишем третий закон Кеплера и сравним систему Солнце-астероид с системой Солнце-Земля.

$$\frac{T^2}{T_{♁}^2} = \frac{a^3}{a_{♁}^3}$$

откуда $T = \boxed{7 \text{ лет}}$

Можно оценить расстояния от Солнца до астероида вблизи точек соединения астероида и вблизи квадратур. В первом случае расстояние от Солнца до астероида $\approx 4.64 - 1 = 3.64$ а.е, во втором случае по теореме Пифагора расстояние от Солнца до астероида $\approx \sqrt{3.4066^2 + 1^2} = 3.55$ а.е.

Критерии оценивания **10**

График 5

12 точек (по 1/3 балла за точку) *4*

Орбита Земли *1*

Большая полуось астероида (в диапазоне от 3.3 до 4 а.е.) 2

Направление движения 1

Период астероида 2

III Закон Кеплера *1*

Ответ *1*