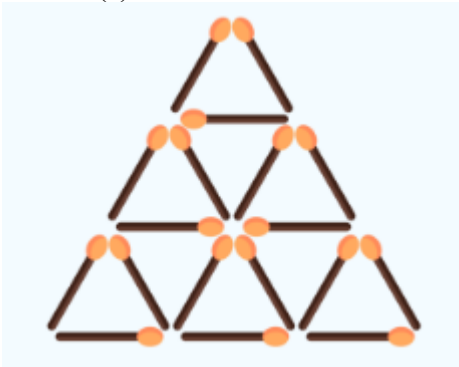
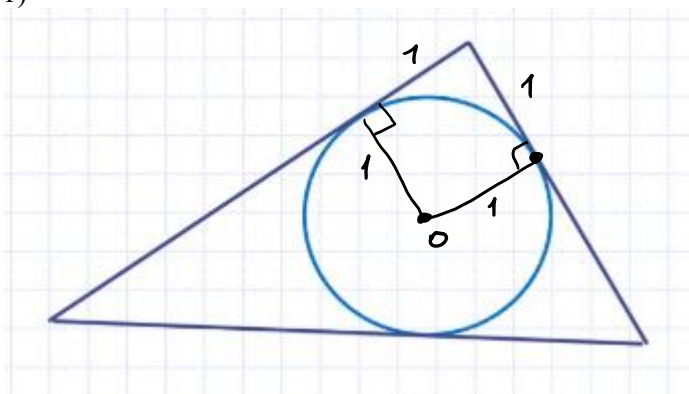


№	Задание и решение
1	На рисунке представлена фигурка "F_3" из спичек, имеющая форму правильного треугольника со стороной, равной трём спичкам. Как видно из рисунка, для изготовления этой фигурки было использовано 18 спичек. Нетрудно догадаться, что для аналогичной фигурки фигурки "F_4" со стороной в 4 спички, потребуется 30 спичек. Пусть "F_n" – аналогичная фигурка со стороной из n спичек. Выберите верное(ые) утверждение(я):  А) Не найдётся ни одной такой фигурки F_n, для которой будет использовано количество спичек, кратное 100. Б) Найдётся такая фигурка F_n, для которой используется количество спичек, кратное 11. В) Для фигурки F_{100} будет использовано более 15000 спичек. Г) Найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что для F_n будет использовано 2025 спичек. Д) Все фигурки вида F_n будут собраны из четного количества спичек. РЕШЕНИЕ. Нетрудно заметить по рисунку, что для формирования треугольника со стороной 3 спички, используется $1 + 2 + 3 = 6$ правильных треугольников со стороной 1 спичка. Итого: $6 \cdot 3 = 18$ спичек. Тогда для фигурки F_n требуется $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$ спичек. А) При $n = 200$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 100$. Утверждение неверно. Б) При $n = 11$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 11$. Утверждение верно. В) При $n = 100$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} = 15150$. Утверждение верно. Г) Пусть $\frac{3n(n+1)}{2} = 2025$. Тогда $n(n+1) = 1350$. Это уравнение не имеет натуральных корней. Утверждение неверно. Д) Для любого $n = 4k - 2, k \in \mathbb{N}$ выражение $\frac{3n(n+1)}{2}$ будет нечётным. Утверждение неверно.

- 2 В треугольник ABC вписана **единичная** окружность, касающаяся стороны AC в точке K . В каком(их) случае(ях) треугольник ABC будет прямоугольным?
- А) $AK = 1; KC = 4$
 Б) $AK = 3; KC = 1$
 В) $AK = 2; KC = 3$
 Г) $AK = 4; KC = 2$
 Д) $AK = 1,5; KC = 5$

РЕШЕНИЕ.

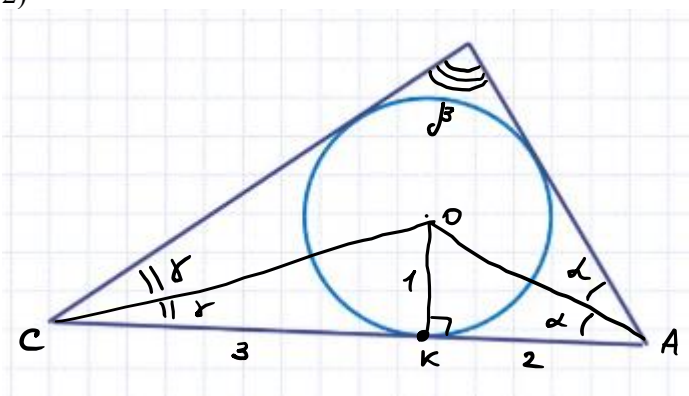
1)



(рис.1)

Если один из отрезков касательной равен радиусу вписанной в треугольник окружности, то треугольник гарантированно прямоугольный, так как при построении двух радиусов к двум точкам касания (см.рис. 1) формируется ромб с двумя прямыми углами, являющийся квадратом. Ответы А и Б верны.

2)



(рис.2)

Рассмотрим случай, когда $AK = 2; KC = 3$. (см.рис. 2)

Тогда $\alpha = \arctg \frac{1}{2}, \gamma = \arctg \frac{1}{3}$. $tg(\alpha + \gamma) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$, откуда $\alpha + \gamma = 45^\circ$; $2\alpha + 2\gamma = \beta =$

90° . Аналогично получаем выводы в буквах Г и Д.

Ответы В и Д верны, Г - нет.

3

Сколько решений может иметь система уравнений $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a ?

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Д) 4

РЕШЕНИЕ.

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y).$$

Графиком множества точек $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ являются две прямые: $y = -x$; $y = 0,5x$.

При любом вещественном $a < 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ не задает ни одной точки в координатной плоскости ($хоу$), тем самым, система решений не имеет.

При $a = 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает одну точку в координатной плоскости ($хоу$) – начало координат. Тем самым, система имеет единственное решение: $(0; 0)$.

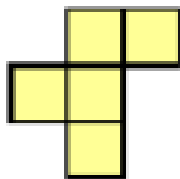
При любом вещественном $a > 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости ($хоу$) окружность с центром в начале координат произвольного ненулевого радиуса. Эта окружность будет дважды пересекать каждую из прямых $y = -x$; $y = 0,5x$. Тем самым, система будет иметь 4 решения.

- 4 Прочитайте задачу.
- «На острове живут $N \geq 10$ жителей, и все они или лжецы, или рыцари. Рыцари всё время говорят правду, а лжецы все время лгут. Однажды все они сели за круглый стол, после чего каждый заявил: «Четверо, сидящие справа от меня – лжецы!» Сколько рыцарей живет на острове?»
- При каком(их) значении(ях) N сформулированная выше задача будет корректной?
- А) 20
 - Б) 22
 - В) 25
 - Г) 28
 - Д) 100

РЕШЕНИЕ.

- 1) Если на острове жили бы только лжецы, то каждый из них сказал бы правду. Тогда на острове есть хотя бы один рыцарь.
- 2) Рыцарь сказал правду, то есть четверо, сидящие справа от него – лжецы, а пятый справа от того рыцаря – опять рыцарь, иначе бы лжец, сидящий справа по соседству от первого рыцаря сказал бы правду.
- 3) Тем самым, рассадка выглядит так: «.....РЛЛЛЛ РЛЛЛЛ...», то есть бьётся на блоки по 5 человек. **Количество жителей острова должно быть кратно 5, иначе задача некорректна.**

- 5 Сколькими способами в клетчатом квадрате размера 100×100 клеток можно разместить пентаминошку, изображенную на рисунке, так, чтобы все вершины этой пентаминошки располагались в узлах клеток? Размеры клеток квадрата и пентаминошки совпадают.
Примечание: пентаминошку можно и поворачивать, и разворачивать.

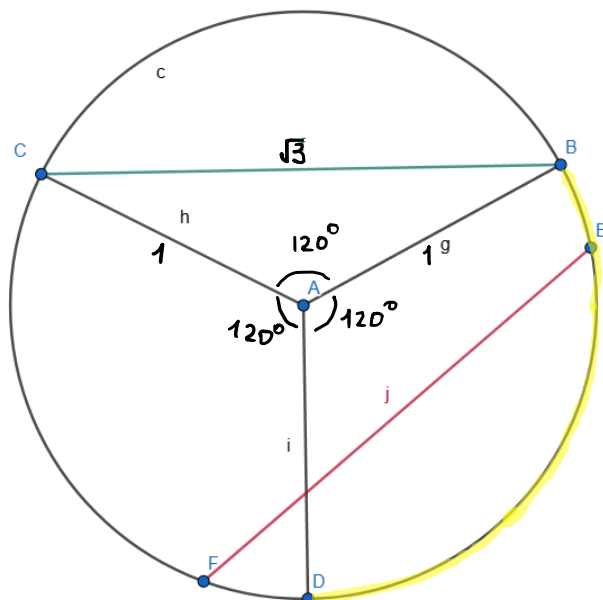


РЕШЕНИЕ.

- 1) Каждую такую пентаминошку можно вписать в клетчатый квадрат 3 на 3.
- 2) Внутри клетчатого квадрата 100×100 можно построить $98 \cdot 98 = 9604$ клетчатых квадратов 3 на 3.
- 3) В каждый такой квадрат 3 на 3 пентаминошку можно вписать $4 \cdot 2 = 8$ способами (с учетом возможности её разворачивать).
- 4) Итого: $9604 \cdot 8 = 76832$ способа.

- 6 В круге с радиусом 1 случайным образом построены две несовпадающие хорды длиной $\sqrt{3}$ каждая. Найдите вероятность, что эти хорды имеют общую точку. При необходимости, округлите ответ до сотых.

РЕШЕНИЕ.



- 1) Если А – центр окружности, то нетрудно заметить (рассчитать), что меньшая дуга, которую отсекает хорда ВС, равная $\sqrt{3}$, равна 120 градусов.
- 2) Пусть кратчайший путь от точки Е до точки F хорды EF, равной $\sqrt{3}$, по единичной окружности задан по часовой стрелке. Тогда, если точка Е будет внутренней точкой меньшей дуги BD (не совпадающей с концами), то хорды ВС и EF пересекаться не будут.
- 3) Тогда $p(BC \cap EF = \emptyset) = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$
- 4) $p(BC \cap EF \neq \emptyset) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ответ: 0,67

- 7 Все члены **бесконечной** арифметической прогрессии – различные натуральные числа, являющиеся решениями неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{1}{2}$.

Найдите наименьшее значение сотого члена этой прогрессии.

РЕШЕНИЕ.

1) Убывающая арифметическая прогрессия, все члены которой - различные натуральные числа, **не может быть бесконечной**.

2) Неравенству $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{1}{2}$ **не удовлетворяет** множество

$$\frac{\pi x}{240} \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, \text{ откуда } x \in (-80 + 480n; 80 + 480n), n \in \mathbb{Z}$$

3) Тогда ни один член прогрессии не может попасть в промежутки

$x \in (-80 + 480n; 80 + 480n), n \in \mathbb{Z}$, то есть разность прогрессии должна быть как минимум $80 - (-80) = 160$.

4) Минимальное значение первого члена прогрессии равен 80 (наименьшее натуральное решение неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{1}{2}$).

5) Минимальное значение сотого члена прогрессии достигается при достижении минимального первого члена и минимальной разности.

$$\min(a_{100}) = \min(a_1) + 99 \min(d) = 80 + 99 \cdot 160 = 15920.$$

P.S. При найденных $\min(a_1)$ и $\min(d)$ условие задачи выполнено.

Ответ: 15920.

- 8 Известно, что дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + px + q$ не менее 8.
Пусть $f(x) = 2x^2 + px + q$.
Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(x + 2024) + f(x + 2025) = 0$ при различных действительных значениях p и q ?

РЕШЕНИЕ.

- 1) Пусть $f(x + 2024) + f(x + 2025) = g(x)$ и $g(x - 2024) = h(x)$.
Тогда $f(x) + f(x + 1) = h(x)$.
2) $g(x - 2024) = h(x)$. Количество нулей функции $h(x)$ и $g(x)$ при сдвиге по вектору $(2024; 0)$ остается неизменным.
3) $f(x) = 2x^2 + px + q$. $D = p^2 - 8q \geq 8$ (из условия)
4) $h(x) = 2x^2 + px + q + 2(x + 1)^2 + p(x + 1) + q = 4x^2 + (2p + 4)x + (2q + 2 + p)$
5) Если $h(x) = 0$, то $\frac{D}{4} = p^2 + 4p + 4 - 4(2q + 2 + p) = p^2 - 8q - 4 > 0$.
Тогда уравнение $f(x + 2024) + f(x + 2025) = 0$ может иметь 2 корня.

Ответ: 2.

- 9 На каждой из N карточек написано натуральное число. Известно, что:
- ровно на 20 карточках есть цифра 2;
 - ровно на 20 карточках есть цифра 7;
 - ни одно из чисел, написанных на карточках, не делится нацело на 3;
 - всего было использовано 50 цифр.
- А) Найдите наименьшее значение N . (2 балла)
- Б) Найдите наименьшую сумму чисел, которые можно было бы написать на этих карточках при наименьшем возможном N из пункта А. (1 балл)
- В) Найдите наименьшую сумму чисел, которую можно было бы написать на этих карточках. (2 балла)

РЕШЕНИЕ.

А)

1) Если карточек 20, то на каждой будет и двойка, и семерка, а так как использовано только 50 цифр, то как минимум на 10 карточках будут числа 27 или 72, которые кратны 3.

Противоречие. Тогда карточек как минимум $20 + 10 = 30$.

2) Если карточек 30, то как минимум на 10 из них будет и цифра 2, и цифра 7. Чтобы числа на этих карточках не были кратны 3, напишем на каждой из них еще по единице, к примеру. Тем самым, имеем 10 карточек с числом 2, 10 карточек с числом 7 и 10 карточек с трёхзначными числами, составленными из 1, 2, 7. Эта ситуация удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 30.

Б) Если карточек 30, то как минимум 10 из них содержат как минимум трёхзначные числа. Их следует сделать минимальными. Это числа 127.

Минимальная сумма будет равной $10 \cdot 2 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot 127 = 1360$.

Ответ: 1360.

В) Пусть будут 50 карточек: 20 – с числом 2, 20 – с числом 7, 10 – с числом 1. Тогда сумма получится равной $40 + 140 + 10 = 190$. Покажем, что это наименьшее число.

Если уменьшить число карточек на 1, то придется два однозначных числа заменить на двузначное, в силу чего новое число будет больше суммы двух однозначных.

Еще сильнее сумма будет увеличиваться, если произвести замену трех однозначных чисел на трехзначное и т.д.

Ответ: 190.

- 10** Общеизвестно, что в любую правильную пирамиду можно вписать шар.
(Шар называется вписанным, если он имеет ровно одну общую точку с каждой гранью пирамиды).

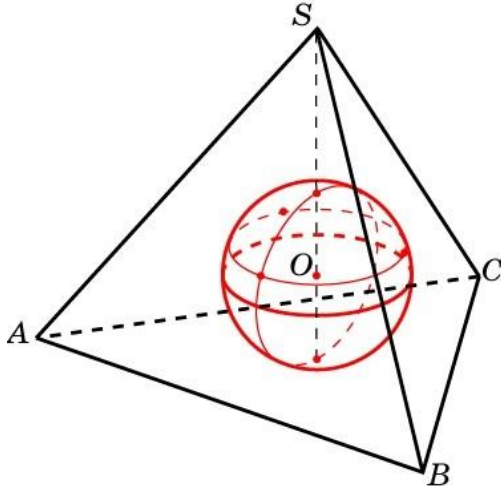
А) Докажите, что существует **пятиугольная** пирамида, не являющаяся правильной, в которую можно вписать шар. (2 балла)

Б) Может ли основание перпендикуляра, опущенного из вершины пятиугольной пирамиды, в которую можно вписать шар, на плоскость её основания, располагаться вне пятиугольника её основания? Обоснуйте свой ответ. (3 балла)

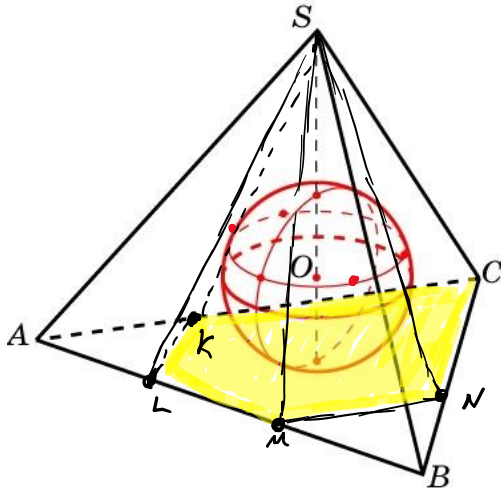
РЕШЕНИЕ.

А)

1) Возьмем, к примеру, правильный тетраэдр и впишем в него шар.



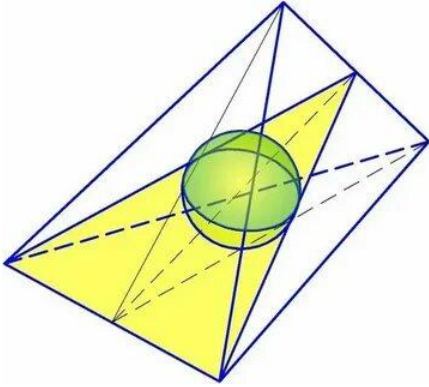
2) Проведем через вершину S две плоскости, касательные к шару, параллельные BC и AC соответственно.



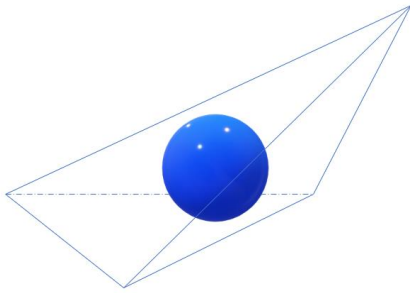
3) Получим неправильную пятиугольную пирамиду $SCKLMN$, в которую вписан всё тот же шар. Нетрудно убедиться в том, что точка L будет между точек A и M .

Б)

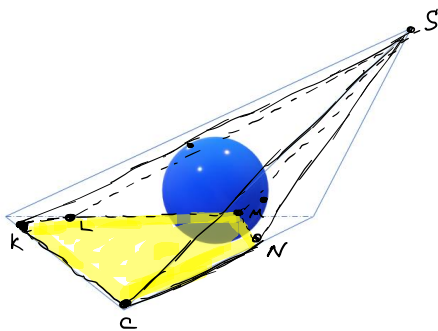
- 1) Центр сферы, вписанной в двугранный угол, находится на биссекторе этого двугранного угла.
- 2) Каждая точка биссектора равноудалена от граней двугранного угла.
- 3) Три попарно непараллельных биссектора трёх двугранных углов при основании треугольной пирамиды гарантированно имеют общую точку.
- 4) Эта точка равноудалена от всех граней в любой треугольной пирамиде. Тем самым, в любую треугольную пирамиду можно вписать шар.



- 5) Рассмотрим треугольную пирамиду, вершина которой проецируется вне треугольника её основания.



- 6) По аналогии с пунктом А проведем пару сечений, касательных к шару, проходящих через вершину пирамиды, параллельных соответственно двум рёбрам основания. Получим пятиугольную пирамиду, в которую можно вписать шар, вершина которой проецируется вне пятиугольника основания.



Ответ: ДА.

11 Прочитайте выдержку.

Чтобы вычислить $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = x$. Корнями этого уравнения будут числа 2 и -1 . Так как $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить, что $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2$.

А) Докажите, используя метод, описанный в приведенной выше выдержке, что

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1. \text{ (2 балла)}$$

Б) Найдите еще какое-нибудь натуральное значение n , отличное от 2, при котором

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}. \text{ Аргументируйте ответ. (2 балла)}$$

В) Пусть при некотором натуральном значении n число $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$ является натуральным. Верно ли, что тогда число $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$ обязательно тоже будет натуральным? Аргументируйте ответ. (2 балла)

Г) Придумайте упражнение для детей (в качестве домашнего задания), аналогичное

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2, \text{ исследование которого сведется к поиску корней уравнения } x^3 - 3x - 2 = 0. \text{ Приведите и задание, и его решение. (4 балла)}$$

РЕШЕНИЕ.

А) Чтобы вычислить $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = -x$. Корнями этого уравнения будут числа -2 и 1 . Так как $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить, что $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1$.

Б) Чтобы вычислить $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = x$. Условием для $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}$ будет дискриминант, являющийся полным квадратом. Это выполняется при $n = 6; 12; 20; 30; 42; \dots$

В) Чтобы вычислить $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = -x$. Квадратные уравнения $x^2 - n = x$ и $x^2 - n = -x$ имеют одинаковый дискриминант и отрицательное отношение свободного коэффициента и коэффициента при старшей степени переменной. То есть, у каждого из уравнений будет 1 положительный и 1 отрицательный корень. Отрицательный в расчёт не берем. P.S. Кроме того, «поколдовав» с обобщенной теоремой Виета, можно заметить, что $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}} = 1$ для любых натуральных n .

Ответ: да

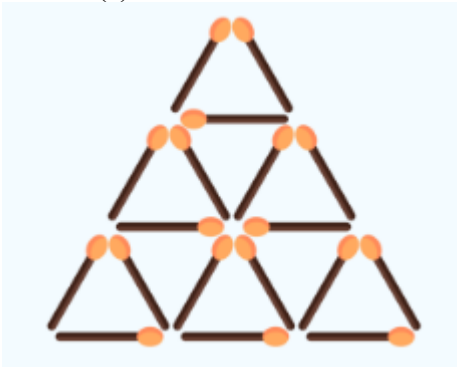
Г) Вычислите $\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + \dots}}}}$.

Решение: $\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + \dots}}}} = x$. Заметим, что $x^3 - 2 = 3x$, откуда $(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0$. Корнями этого уравнения будут числа 2 и -1 . Так как $x > 0$, то $\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + 3\sqrt[3]{2 + \dots}}}} = 2$.

Ответ: 2.

Решения отборочного тура.

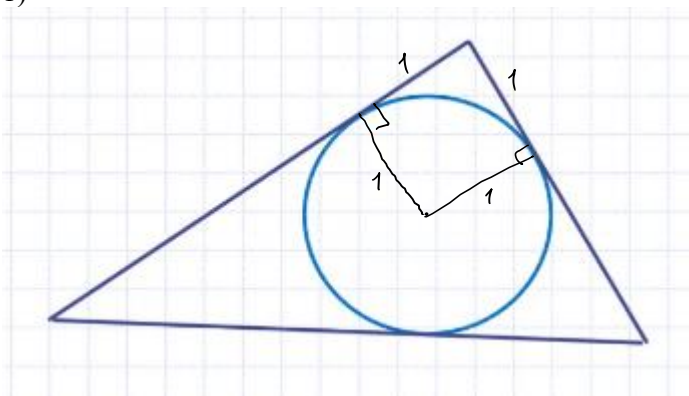
Вариант 2.

№	Задание и решение
1	На рисунке представлена фигурка "F_3" из спичек, имеющая форму правильного треугольника со стороной, равной трём спичкам. Как видно из рисунка, для изготовления этой фигурки было использовано 18 спичек. Нетрудно догадаться, что для аналогичной фигурки "F_4" со стороной в 4 спички, потребуется 30 спичек. Пусть "F_n" – аналогичная фигурка со стороной из n спичек. Выберите верное(ые) утверждение(я):  А) Не найдётся ни одной такой фигурки F_n, для которой будет использовано количество спичек, кратное 11. Б) Найдётся такая фигурка F_n, для которой используется количество спичек, кратное 100. В) Для фигурки F_{2025} будет использовано более трёх миллионов спичек. Г) Найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что для F_n будет использовано 15150 спичек. Д) Начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$ все фигурки вида F_n будут собраны из четного количества спичек. РЕШЕНИЕ. Нетрудно заметить по рисунку, что для формирования треугольника со стороной 3 спички, используется $1 + 2 + 3 = 6$ правильных треугольников со стороной 1 спичка. Итого: $6 \cdot 3 = 18$ спичек. Тогда для фигурки F_n требуется $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$ спичек. А) При $n = 11$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 11$. Утверждение неверно. Б) При $n = 200$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 100$. Утверждение верно. В) При $n = 2025$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} = 6153935$. Утверждение верно. Г) Пусть $\frac{3n(n+1)}{2} = 15150$. Тогда $n(n+1) = 10100$. Это уравнение имеет нутральный корень 100. Утверждение верно. Д) Для любого $n = 4k - 2, k \in \mathbb{N}$ выражение $\frac{3n(n+1)}{2}$ будет нечётным. Утверждение неверно.

- 2 В треугольник ABC вписана **единичная** окружность, касающаяся стороны AC в точке K . В каком(их) случае(ях) треугольник ABC будет прямоугольным?
- А) $AK = 1; KC = 2$
- Б) $AK = 4; KC = 1$
- В) $AK = 3; KC = \frac{3}{2}$
- Г) $AK = 4; KC = \frac{5}{3}$
- Д) $AK = 2; KC = 2$

РЕШЕНИЕ.

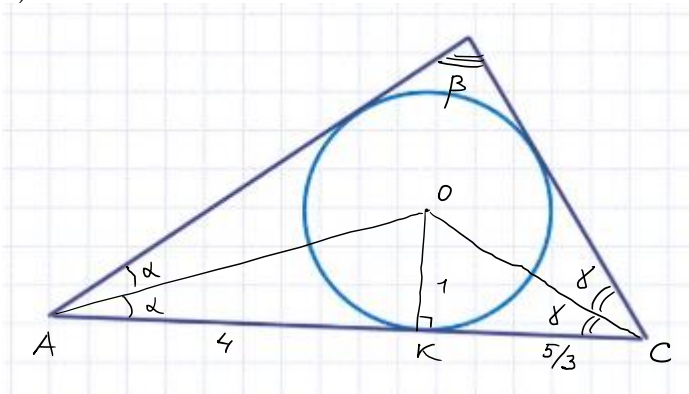
1)



(рис.1)

Если один из отрезков касательной равен радиусу вписанной в треугольник окружности, то треугольник гарантированно прямоугольный, так как при построении двух радиусов к двум точкам касания (см.рис. 1) формируется ромб с двумя прямыми углами, являющийся квадратом. Ответы А и Б верны.

2)



(рис.2)

Рассмотрим случай, когда $AK = 4; KC = \frac{5}{3}$. (см.рис. 2)

Тогда $\alpha = \arctg \frac{1}{4}, \gamma = \arctg \frac{3}{5}$. $tg(\alpha + \gamma) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}} = 1$, откуда $\alpha + \gamma = 45^\circ; 2\alpha + 2\gamma = \beta =$

90° . Аналогично получаем выводы в буквах В и Д.

Ответ Г верен, В и Д - нет.

3

Сколько решений может иметь система уравнений $\begin{cases} x^2 - 1 - y^2 + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a ?

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Д) 4

РЕШЕНИЕ.

$$x^2 - 1 - y^2 + 2y = x^2 - (y - 1)^2 = (x - y + 1)(x + y - 1).$$

Графиком множества точек $x^2 - 1 - y^2 + 2y = 0$ являются две прямые: $y = x + 1$; $y = 1 - x$, пересекающиеся в точке $(0; 1)$.

При любом вещественном $a < 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ не задает ни одной точки в координатной плоскости ($хоу$), тем самым, система решений не имеет.

При $a = 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает одну точку в координатной плоскости ($хоу$) – начало координат. Ни один из графиков $y = x + 1$; $y = 1 - x$ не проходит через начало координат. Система решений не имеет.

При $0 < a < \frac{1}{2}$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости ($хоу$) окружность с центром в начале координат радиусом, меньшим $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Эта окружность не будет пересекать ни одну из прямых $y = x + 1$; $y = 1 - x$. Тем самым, система решений не имеет.

При $a = \frac{1}{2}$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости ($хоу$) окружность с центром в начале координат радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Эта окружность будет касаться каждой из прямых $y = x + 1$; $y = 1 - x$. Тем самым, система будет иметь 2 решения.

При $a = 1$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости ($хоу$) окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Система будет иметь 3 решения: $(0; 1)$; $(1; 0)$; $(-1; 0)$.

При $\frac{1}{2} < a < 1$, как и при $a > 1$, система будет иметь 4 решения.

- 4 Прочитайте задачу.
«На острове живут $N \geq 12$ жителей, и все они или лжецы, или рыцари. Рыцари всё время говорят правду, а лжецы все время лгут. Однажды все они сели за круглый стол, после чего каждый заявил: «Пятеро, сидящие справа от меня – лжецы!» Сколько рыцарей живет на острове?»
При каком(их) значении(ях) N сформулированная выше задача будет корректной?
- А) 42
 - Б) 45
 - В) 48
 - Г) 50
 - Д) 100

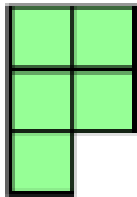
РЕШЕНИЕ.

- 1) Если на острове жили бы только лжецы, то каждый из них сказал бы правду. Тогда на острове есть хотя бы один рыцарь.
- 2) Рыцарь сказал правду, то есть пятеро, сидящие справа от него – лжецы, а шестой справа от того рыцаря – опять рыцарь, иначе бы лжец, сидящий справа по соседству от первого рыцаря сказал бы правду.
- 3) Тем самым, рассадка выглядит так: «....РЛЛЛЛЛ РЛЛЛЛЛ...», то есть бьётся на блоки по 6 человек. **Количество жителей острова должно быть кратно 6, иначе задача некорректна.**

5

Сколькими способами в клетчатом квадрате размера 100×100 клеток можно разместить пентаминошку, изображенную на рисунке, так, чтобы все вершины этой пентаминошки располагались в узлах клеток? Размеры клеток квадрата и пентаминошки совпадают.

Примечание: пентаминошку можно и поворачивать, и разворачивать.

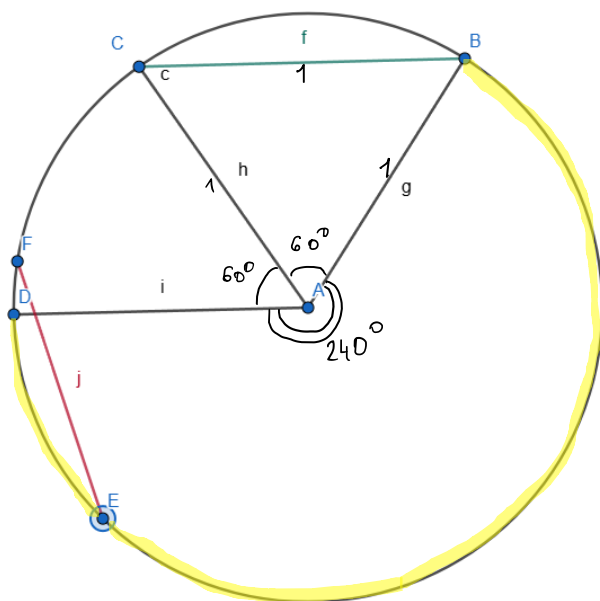


РЕШЕНИЕ.

- 1) Каждую такую пентаминошку можно вписать в клетчатый прямоугольник 2 на 3.
- 2) Внутри клетчатого квадрата 100×100 можно построить $2 \cdot 99 \cdot 98 = 19404$ клетчатых прямоугольников 2 на 3.
- 3) В каждый такой прямоугольник 2 на 3 пентаминошку можно вписать 4 способами (с учетом возможности её разворачивать).
- 4) Итого: $19404 \cdot 4 = 77616$ способов.

- 6 В круге с радиусом 1 случайным образом построены две несовпадающие хорды длиной 1 каждая. Найдите вероятность, что эти хорды имеют общую точку. При необходимости, округлите ответ до сотых.

РЕШЕНИЕ.



1) Если А – центр окружности, то нетрудно заметить, что меньшая дуга, которую отсекает хорда ВС, равная 1, равна 60 градусам.

2) Пусть кратчайший путь от точки Е до точки F хорды EF, равной 1, по единичной окружности задан по часовой стрелке. Тогда, если точка Е будет внутренней точкой большей дуги BD (не совпадающей с концами), то хорды ВС и EF пересекаться не будут.

3) Тогда $p(BC \cap EF = \emptyset) = \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$

4) $p(BC \cap EF \neq \emptyset) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Ответ: 0,33

- 7 Все члены **бесконечной** арифметической прогрессии – различные натуральные числа, являющиеся решениями неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдите наименьшее значение сотого члена этой прогрессии.

РЕШЕНИЕ.

1) Убывающая арифметическая прогрессия, все члены которой - различные натуральные числа, **не может быть бесконечной**.

2) Неравенству $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ **не удовлетворяет** множество

$$\frac{\pi x}{240} \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z, \text{ откуда } x \in (-60 + 480n; 60 + 480n), n \in Z$$

3) Тогда ни один член прогрессии не может попасть в промежутки

$x \in (-60 + 480n; 60 + 480n), n \in Z$, то есть разность прогрессии должна быть как минимум $60 - (-60) = 120$.

4) Минимальное значение первого члена прогрессии равен 60 (наименьшее натуральное решение неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$).

5) Минимальное значение сотого члена прогрессии достигается при достижении минимального первого члена и минимальной разности.

$$\min(a_{100}) = \min(a_1) + 99 \min(d) = 60 + 99 \cdot 120 = 11940.$$

P.S. При найденных $\min(a_1)$ и $\min(d)$ условие задачи выполнено.

Ответ: 11940.

- 8 Известно, что дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + px + q$ не более 8.
 Пусть $f(x) = 2x^2 + px + q$.
 Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(x + 2024) + f(x + 2025) = 0$ при различных действительных значениях p и q ?
- РЕШЕНИЕ.**
- 1) Пусть $f(x + 2024) + f(x + 2025) = g(x)$ и $g(x - 2024) = h(x)$.
 Тогда $f(x) + f(x + 1) = h(x)$.
- 2) $g(x - 2024) = h(x)$. Количество нулей функции $h(x)$ и $g(x)$ при сдвиге по вектору $(2024; 0)$ остается неизменным.
- 3) $f(x) = 2x^2 + px + q$. $D = p^2 - 8q \leq 8$ (из условия)
- 4) $h(x) = 2x^2 + px + q + 2(x + 1)^2 + p(x + 1) + q = 4x^2 + (2p + 4)x + (2q + 2 + p)$
- 5) Если $h(x) = 0$, то $\frac{D}{4} = p^2 + 4p + 4 - 4(2q + 2 + p) = p^2 - 8q - 4 \leq 4$.
- Тогда уравнение $f(x + 2024) + f(x + 2025) = 0$ может иметь или 0, или 1, или 2 корня.
- Ответ: 0; 1 или 2.**

- 9 На каждой из N карточек написано натуральное число. Известно, что:
- ровно на 10 карточках есть цифра 5;
 - ровно на 10 карточках есть цифра 7;
 - ни одно из чисел, написанных на карточках, не делится нацело на 3;
 - всего было использовано 25 цифр.
- А) Найдите наименьшее значение N . (2 балла)
- Б) Найдите наименьшую сумму чисел, которые можно было бы написать на этих карточках при наименьшем возможном N из пункта А. (1 балл)
- В) Найдите наименьшую сумму чисел, которую можно было бы написать на этих карточках. (2 балла)

РЕШЕНИЕ.

А)

1) Если карточек 10, то на каждой будет и пятёрка, и семерка, а так как использовано только 25 цифр, то как минимум на 5 карточках будут числа 57 или 75, которые кратны 3. Противоречие. Тогда карточек как минимум $10 + 5 = 15$.

2) Если карточек 15, то как минимум на 5 из них будет и цифра 5, и цифра 7. Чтобы числа на этих карточках не были кратны 3, напишем на каждой из них еще по единице, к примеру. Тем самым, имеем 5 карточек с числом 5, 5 карточек с числом 7 и 5 карточек с трёхзначными числами, составленными из 1, 5, 7. Эта ситуация удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 15.

Б) Если карточек 15, то как минимум 5 из них содержат как минимум трёхзначные числа. Их следует сделать минимальными. Это числа 157.

Минимальная сумма будет равной $5 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 5 \cdot 157 = 845$.

Ответ: 845.

В) Пусть будут 25 карточек: 10 – с числом 5, 10 – с числом 7, 5 – с числом 1. Тогда сумма получится равной $50 + 70 + 5 = 125$. Покажем, что это наименьшее число.

Если уменьшить число карточек на 1, то придется два однозначных числа заменить на двузначное, в силу чего новое число будет больше суммы двух однозначных.

Еще сильнее сумма будет увеличиваться, если произвести замену трех однозначных чисел на трехзначное и т.д.

Ответ: 125.

- 10** Общеизвестно, что в любую правильную пирамиду можно вписать шар.
(Шар называется вписанным, если он имеет ровно одну общую точку с каждой гранью пирамиды).

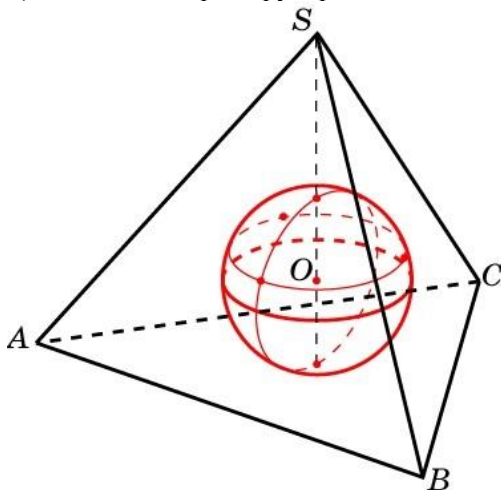
А) Докажите, что существует **шестиугольная** пирамида, не являющаяся правильной, в которую можно вписать шар. (2 балла)

Б) Может ли основание перпендикуляра, опущенного из вершины шестиугольной пирамиды, в которую можно вписать шар, на плоскость её основания, располагаться вне шестиугольника её основания? Обоснуйте свой ответ. (3 балла)

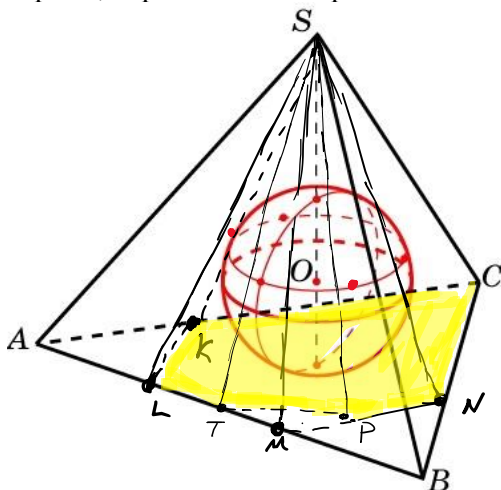
РЕШЕНИЕ.

А)

1) Возьмем, к примеру, правильный тетраэдр и впишем в него шар.



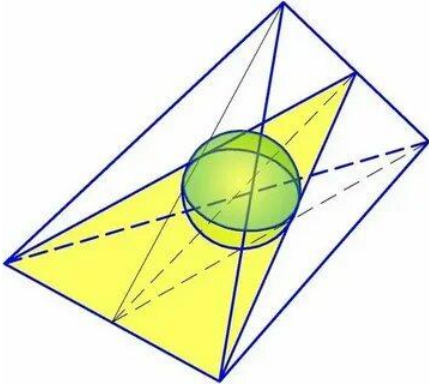
2) Проведем через вершину S две плоскости, касательные к шару, параллельные BC и AC соответственно, и, к примеру, еще одну плоскость, касательную к шару и проходящую через S, пересекающие отрезки LM и MN.



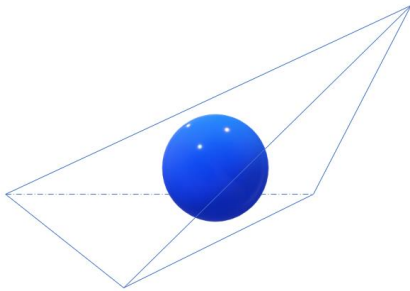
3) Получим неправильную шестиугольную пирамиду SCKLTPN, в которую вписан всё тот же шар.

Б)

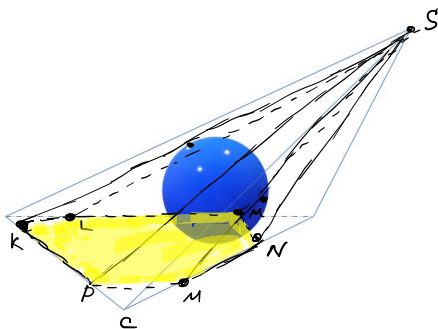
- 1) Центр сферы, вписанной в двугранный угол, находится на биссекторе этого двугранного угла.
- 2) Каждая точка биссектора равноудалена от граней двугранного угла.
- 3) Три попарно непараллельных биссектора трёх двугранных углов при основании треугольной пирамиды гарантированно имеют общую точку.
- 4) Эта точка равноудалена от всех граней в любой треугольной пирамиде. Тем самым, в любую треугольную пирамиду можно вписать шар.



- 5) Рассмотрим треугольную пирамиду, вершина которой проектируется вне треугольника её основания.



- 6) По аналогии с пунктом А проведем тройку сечений, касательных к шару, проходящих через вершину пирамиды, параллельных соответственно всем трем рёбрам основания. Получим шестиугольную пирамиду, в которую можно вписать шар, вершина которой проектируется вне шестиугольника основания.



Ответ: ДА.

11 Прочитайте выдержку.

Чтобы вычислить $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = x$. Корнями этого уравнения будут числа 2 и -1 . Так как $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить, что

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2.$$

А) Докажите, используя метод, описанный в приведенной выше выдержке, что

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1. \text{ (2 балла)}$$

Б) Найдите еще какое-нибудь натуральное значение n , отличное от 2, при котором

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}. \text{ Аргументируйте ответ. (2 балла)}$$

В) Пусть при некотором натуральном значении n число $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$

является натуральным. Верно ли, что тогда число $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$

обязательно тоже будет натуральным? Аргументируйте ответ. (2 балла)

Г) Придумайте упражнение для детей (в качестве домашнего задания), аналогичное

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2, \text{ исследование которого сведется к поиску корней уравнения } x^3 + x - 10 = 0. \text{ Приведите и задание, и его решение. (4 балла)}$$

РЕШЕНИЕ.

А) Чтобы вычислить $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = -x$. Корнями этого уравнения будут числа -2 и 1 . Так как $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить, что $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1$.

Б) Чтобы вычислить $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = x$. Условием для $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}$ будет дискриминант, являющийся полным квадратом. Это выполняется при $n = 6; 12; 20; 30; 42; \dots$

В) Чтобы вычислить $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = -x$. Квадратные уравнения $x^2 - n = x$ и $x^2 - n = -x$ имеют одинаковый дискриминант и отрицательное отношение свободного коэффициента и коэффициента при старшей степени переменной. То есть, у каждого из уравнений будет 1 положительный и 1 отрицательный корень. Отрицательный в расчёт не берем. P.S. Кроме того, «поколдовав» с обобщенной теоремой Виета, можно заметить, что $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}} = 1$ для любых натуральных n .

Ответ: да

Г) Вычислите $\sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \dots}}}}$.

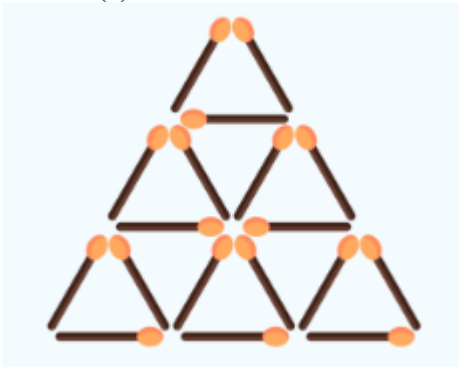
Решение: $\sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \dots}}}} = x$. Заметим, что $x^3 - 10 = -x$, откуда $(x - 2)(x^2 + 2x + 5) = 0$. Корнем этого уравнения будет число 2.

$$\sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{10 - \dots}}}} = 2.$$

Ответ: 2.

Решения отборочного тура.

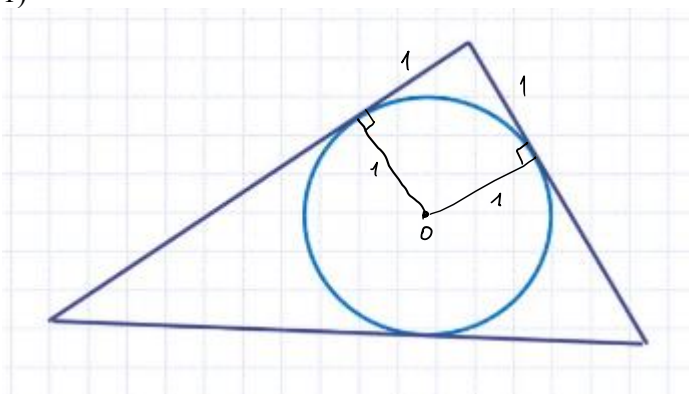
Вариант 3.

№	Задание и решение
1	На рисунке представлена фигурка "F_3" из спичек, имеющая форму правильного треугольника со стороной, равной трём спичкам. Как видно из рисунка, для изготовления этой фигурки было использовано 18 спичек. Нетрудно догадаться, что для аналогичной фигурки "F_4" со стороной в 4 спички, потребуется 30 спичек. Пусть "F_n" – аналогичная фигурка со стороной из n спичек. Выберите верное(ые) утверждение(я):  А) Не найдётся ни одной такой фигурки F_n, для которой будет использовано количество спичек, кратное 17. Б) Найдётся такая фигурка F_n, для которой используется количество спичек, кратное 50. В) Для фигурки F_{10} будет использовано менее 150 спичек. Г) Найдутся такие $n \in N$ и $k \in N$, что для F_n будет использовано 10^k спичек. Д) Начиная с некоторого $n \in N$ все фигурки вида F_n будут собраны из нечетного количества спичек. РЕШЕНИЕ. Нетрудно заметить по рисунку, что для формирования треугольника со стороной 3 спички, используется $1 + 2 + 3 = 6$ правильных треугольников со стороной 1 спичка. Итого: $6 \cdot 3 = 18$ спичек. Тогда для фигурки F_n требуется $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$ спичек. А) При $n = 17$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 17$. Утверждение неверно. Б) При $n = 100$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} : 50$. Утверждение верно. В) При $n = 10$ имеем $\frac{3n(n+1)}{2} = 165$. Утверждение неверно. Г) Пусть $\frac{3n(n+1)}{2} = 10^k$. Однако при любом $n \in N$ верно $\frac{3n(n+1)}{2} : 3$, а при любом $k \in N$ верно 10^k не кратно 3. Утверждение неверно. Д) Для любого $n = 4k, k \in N$ выражение $\frac{3n(n+1)}{2}$ будет чётным. Утверждение неверно.

- 2 В треугольник ABC вписана **единичная** окружность, касающаяся стороны AC в точке K . В каком(их) случае(ях) треугольник ABC будет прямоугольным?
- А) $AK = 1; KC = 5$
 Б) $AK = 10; KC = 1$
 В) $AK = 3; KC = 3$
 Г) $AK = 3; KC = 2$
 Д) $AK = 1,5; KC = 3,5$

РЕШЕНИЕ.

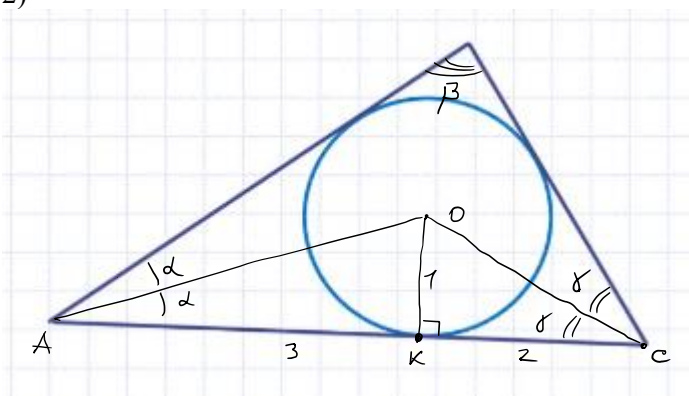
1)



(рис.1)

Если один из отрезков касательной равен радиусу вписанной в треугольник окружности, то треугольник гарантированно прямоугольный, так как при построении двух радиусов к двум точкам касания (см.рис. 1) формируется ромб с двумя прямыми углами, являющийся квадратом. Ответы А и Б верны.

2)



(рис.2)

Рассмотрим случай, когда $AK = 3; KC = 2$. (см.рис. 2)

Тогда $\alpha = \arctg \frac{1}{3}, \gamma = \arctg \frac{1}{2}, tg(\alpha + \gamma) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$, откуда $\alpha + \gamma = 45^\circ; 2\alpha + 2\gamma = \beta =$

90° . Аналогично получаем выводы в буквах В и Д.

Ответ Г верен, В и Д - нет.

3

Сколько решений может иметь система уравнений $\begin{cases} |x - y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a ?

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Д) 4

РЕШЕНИЕ.

Графиком множества точек $|x - y| = 1$ являются две параллельные прямые: $y = x + 1$; $y = x - 1$.

При любом вещественном $a < 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ не задает ни одной точки в координатной плоскости (xOy), тем самым, система решений не имеет.

При $a = 0$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает одну точку в координатной плоскости (xOy) – начало координат. Ни один из графиков $y = x + 1$; $y = x - 1$ не проходит через начало координат. Система решений не имеет.

При $0 < a < \frac{1}{2}$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости (xOy) окружность с центром в начале координат радиусом, меньшим $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Эта окружность не будет пересекать ни одну из прямых $y = x + 1$; $y = x - 1$. Тем самым, система решений не имеет.

При $a = \frac{1}{2}$ уравнение $x^2 + y^2 = a$ задает в координатной плоскости (xOy) окружность с центром в начале координат радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Эта окружность будет касаться каждой из прямых $y = x + 1$; $y = x - 1$. Тем самым, система будет иметь 2 решения.

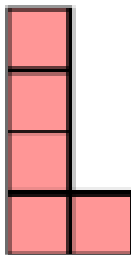
При $\frac{1}{2} < a$ окружность $x^2 + y^2 = a$ будет дважды пересекать каждую из прямых $y = x + 1$; $y = x - 1$. Система будет иметь 4 решения.

- 4 Прочитайте задачу.
- «На острове живут $N \geq 12$ жителей, и все они или лжецы, или рыцари. Рыцари всё время говорят правду, а лжецы все время лгут. Однажды все они сели за круглый стол, после чего каждый заявил: «Трое, сидящие справа от меня – лжецы!» Сколько рыцарей живет на острове?»
- При каком(их) значении(ях) N сформулированная выше задача будет корректной?
- А) 22
Б) 25
В) 28
Г) 30
Д) 100

РЕШЕНИЕ.

- 1) Если на острове жили бы только лжецы, то каждый из них сказал бы правду. Тогда на острове есть хотя бы один рыцарь.
- 2) Рыцарь сказал правду, то есть трое, сидящие справа от него – лжецы, а четвертый справа от того рыцаря – опять рыцарь, иначе бы лжец, сидящий справа по соседству от первого рыцаря сказал бы правду.
- 3) Тем самым, рассадка выглядит так: «....РЛЛЛ РЛЛЛ...», то есть бьётся на блоки по 4 человека. **Количество жителей острова должно быть кратно 4, иначе задача некорректна.**

- 5 Сколькими способами в клетчатом квадрате размера 100×100 клеток можно разместить пентаминошку, изображенную на рисунке, так, чтобы все вершины этой пентаминошки располагались в узлах клеток? Размеры клеток квадрата и пентаминошки совпадают.
Примечание: пентаминошку можно и поворачивать, и разворачивать.

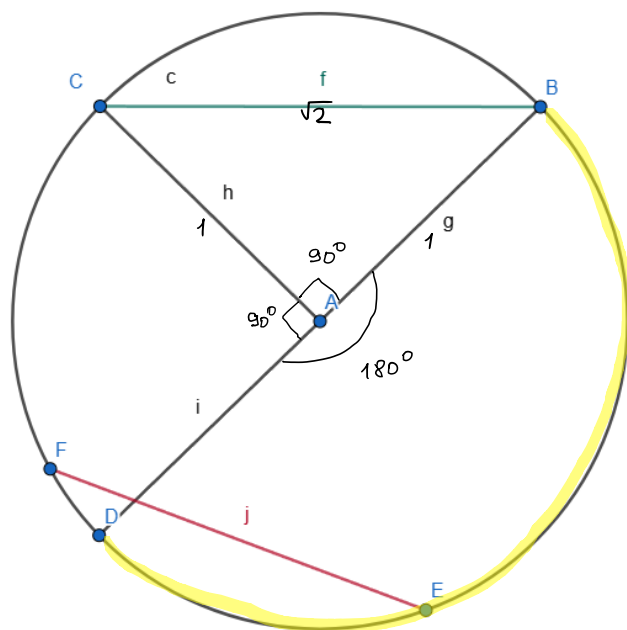


РЕШЕНИЕ.

- 1) Каждую такую пентаминошку можно вписать в клетчатый прямоугольник 2 на 4.
- 2) Внутри клетчатого квадрата 100×100 можно построить $2 \cdot 99 \cdot 97 = 19206$ клетчатых прямоугольников 2 на 4.
- 3) В каждый такой прямоугольник 2 на 4 пентаминошку можно вписать 4 способами (с учетом возможности её разворачивать).
- 4) Итого: $19206 \cdot 4 = 76824$ способа.

- 6 В круге с радиусом 1 случайным образом построены две несовпадающие хорды длиной $\sqrt{2}$ каждая. Найдите вероятность, что эти хорды имеют общую точку. При необходимости, округлите ответ до сотых.

РЕШЕНИЕ.



1) Если A – центр окружности, то нетрудно заметить, что меньшая дуга, которую отсекает хорда BC , равная $\sqrt{2}$, равна 90° градусов.

2) Пусть кратчайший путь от точки E до точки F хорды EF , равной $\sqrt{2}$, по единичной окружности задан по часовой стрелке. Тогда, если точка E будет внутренней точкой дуги BD , не содержащей точку C (не совпадающей с концами), то хорды BC и EF пересекаться не будут.

3) Тогда $p(BC \cap EF = \emptyset) = \frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$

4) $p(BC \cap EF \neq \emptyset) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ: 0,5

- 7 Все члены **бесконечной** арифметической прогрессии – различные натуральные числа, являющиеся решениями неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдите наименьшее значение сотого члена этой прогрессии.

РЕШЕНИЕ.

1) Убывающая арифметическая прогрессия, все члены которой - различные натуральные числа, **не может быть бесконечной**.

2) Неравенству $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ **не удовлетворяет** множество

$$\frac{\pi x}{240} \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z, \text{ откуда } x \in (-40 + 480n; 40 + 480n), n \in Z$$

3) Тогда ни один член прогрессии не может попасть в промежутки $x \in (-40 + 480n; 40 + 480n), n \in Z$, то есть разность прогрессии должна быть как минимум $40 - (-40) = 80$.

4) Минимальное значение первого члена прогрессии равен 40 (наименьшее натуральное решение неравенства $\cos \frac{\pi x}{240} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$).

5) Минимальное значение сотого члена прогрессии достигается при достижении минимального первого члена и минимальной разности.

$$\min(a_{100}) = \min(a_1) + 99 \min(d) = 40 + 99 \cdot 80 = 7960.$$

P.S. При найденных $\min(a_1)$ и $\min(d)$ условие задачи выполнено.

Ответ: 7960.

- 8 Известно, что дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + px + q$ не менее 8. Пусть $f(x) = 2x^2 + px + q$. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(x - 2025) + f(x - 2026) = 0$ при различных действительных значениях p и q ?

РЕШЕНИЕ.

1) Пусть $f(x - 2025) + f(x - 2026) = g(x)$ и $g(x + 2026) = h(x)$.

Тогда $f(x) + f(x + 1) = h(x)$.

2) $g(x + 2026) = h(x)$. Количество нулей функции $h(x)$ и $g(x)$ при сдвиге по вектору $(-2026; 0)$ остается неизменным.

3) $f(x) = 2x^2 + px + q$. $D = p^2 - 8q \geq 8$ (из условия)

4) $h(x) = 2x^2 + px + q + 2(x + 1)^2 + p(x + 1) + q = 4x^2 + (2p + 4)x + (2q + 2 + p)$

5) Если $h(x) = 0$, то $\frac{D}{4} = p^2 + 4p + 4 - 4(2q + 2 + p) = p^2 - 8q - 4 > 0$.

Тогда уравнение $f(x - 2025) + f(x - 2026) = 0$ может иметь 2 корня.

Ответ: 2.

9

На каждой из N карточек написано натуральное число. Известно, что:

- ровно на 15 карточках есть цифра 2;
- ровно на 15 карточках есть цифра 4;
- ни одно из чисел, написанных на карточках, не делится нацело на 3;
- всего было использовано 40 цифр.

А) Найдите наименьшее значение N . (2 балла)

Б) Найдите наименьшую сумму чисел, которую можно было бы написать на этих карточках при наименьшем возможном N из пункта А. (1 балл)

В) Найдите наименьшую сумму чисел, которые можно было бы написать на этих карточках. (2 балла)

РЕШЕНИЕ.

А)

1) Если карточек 15, то на каждой будет и двойка, и четверка, а так как использовано только 40 цифр, то как минимум на 5 карточках будут числа 24 или 42, которые кратны 3. Противоречие. Тогда карточек как минимум $15 + 5 = 20$.

2) Если карточек 20, то как минимум на 10 из них будет и цифра 2, и цифра 4. Чтобы числа на этих карточках не были кратны 3, напишем на каждой из них еще по единице, к примеру. Тем самым, имеем 5 карточек с числом 2, 5 карточек с числом 4 и 10 карточек с трёхзначными числами, составленными из 1, 2, 4. Эта ситуация удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: 20.

Б) Если карточек 20, то как минимум 10 из них содержат как минимум трёхзначные числа. Их следует сделать минимальными. Это числа 124.

Минимальная сумма будет равной $5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 124 = 1270$.

Ответ: 1270.

В) Пусть будут 40 карточек: 15 – с числом 2, 15 – с числом 4, 10 – с числом 1. Тогда сумма получится равной $30 + 60 + 10 = 100$. Покажем, что это наименьшее число.

Если уменьшить число карточек на 1, то придется два однозначных числа заменить на двузначное, в силу чего новое число будет больше суммы двух однозначных.

Еще сильнее сумма будет увеличиваться, если произвести замену трех однозначных чисел на трехзначное и т.д.

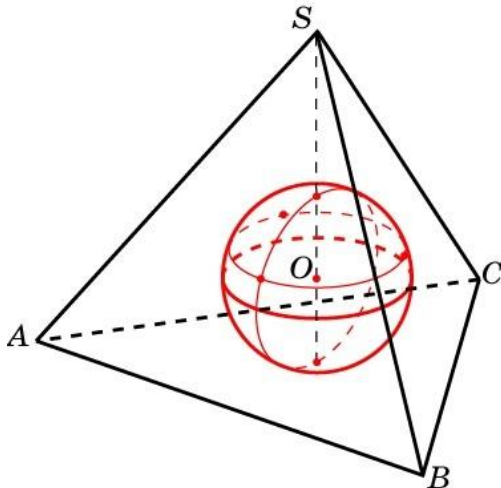
Ответ: 100.

- 10** Общеизвестно, что в любую правильную пирамиду можно вписать шар.
(Шар называется вписанным, если он имеет ровно одну общую точку с каждой гранью пирамиды).
- А) Докажите, что существует **четырёхугольная** пирамида, не являющаяся правильной, в которую можно вписать шар. (2 балла)
- Б) Может ли основание перпендикуляра, опущенного из вершины четырёхугольной пирамиды, в которую можно вписать шар, на плоскость её основания, располагаться вне четырёхугольника её основания? Обоснуйте свой ответ. (3 балла)

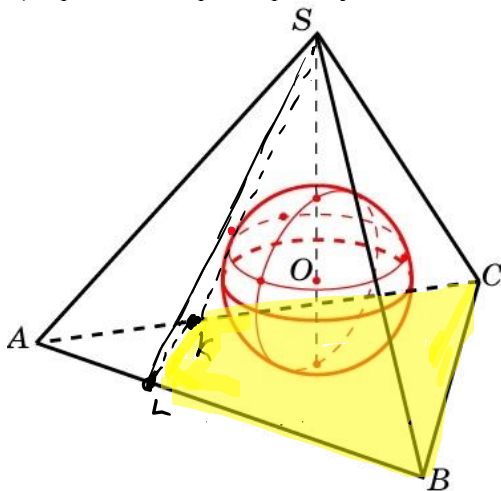
РЕШЕНИЕ.

А)

- 1) Возьмем, к примеру, правильный тетраэдр и впишем в него шар.



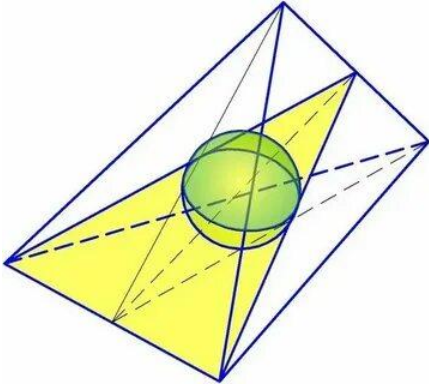
- 2) Проведем через вершину S плоскость, касательную к шару, параллельную BC .



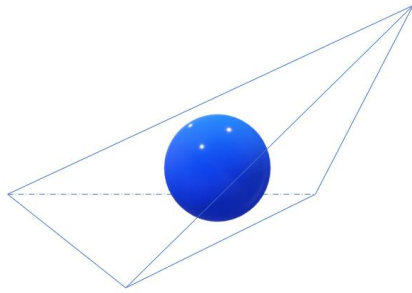
- 3) Получим неправильную четырёхугольную пирамиду $SBCKL$, в которую вписан всё тот же шар.

Б)

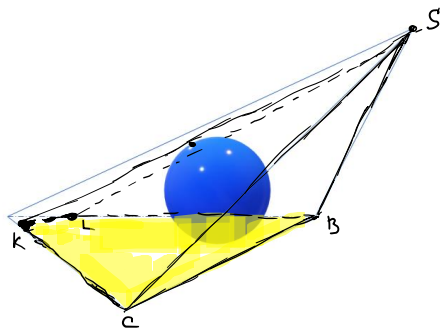
- 1) Центр сферы, вписанной в двугранный угол, находится на биссекторе этого двугранного угла.
- 2) Каждая точка биссектора равноудалена от граней двугранного угла.
- 3) Три попарно непараллельных биссектора трёх двугранных углов при основании треугольной пирамиды гарантированно имеют общую точку.
- 4) Эта точка равноудалена от всех граней в любой треугольной пирамиде. Тем самым, в любую треугольную пирамиду можно вписать шар.



- 5) Рассмотрим треугольную пирамиду, вершина которой проектируется вне треугольника её основания.



- 6) По аналогии с пунктом А проведем сечение, плоскость которого - касательная к шару, проходящее через вершину пирамиды, параллельное рёбру основания. Получим четырёхугольную пирамиду, в которую можно вписать шар, вершина которой проектируется вне шестиугольника основания.



Ответ: ДА.

11 Прочитайте выдержку.

Чтобы вычислить $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = x$. Корнями этого уравнения будут числа 2 и -1 . Так как $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить, что $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2$.

А) Докажите, используя метод, описанный в приведенной выше выдержке, что

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1. \text{ (2 балла)}$$

Б) Найдите еще какое-нибудь натуральное значение n , отличное от 2, при котором

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}. \text{ Аргументируйте ответ. (2 балла)}$$

В) Пусть при некотором натуральном значении n число $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$

является натуральным. Верно ли, что тогда число $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$

обязательно тоже будет натуральным? Аргументируйте ответ. (2 балла)

Г) Придумайте упражнение для детей (в качестве домашнего задания), аналогичное

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2, \text{ исследование которого сведется к поиску корней уравнения } x^3 + 2x - 12 = 0. \text{ Приведите и задание, и его решение. (4 балла)}$$

РЕШЕНИЕ.

А) Чтобы вычислить $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 2 = -x$. Корнями этого уравнения

будут числа -2 и 1 . Так как $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} > 0$, то смело можно заявить,

что $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}}} = 1$.

Б) Чтобы вычислить $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = x$. Условием для

$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} \in \mathbb{N}$ будет дискриминант, являющийся полным квадратом. Это выполняется при $n = 6; 12; 20; 30; 42; \dots$

В) Чтобы вычислить $\sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}}$, нужно лишь убедиться в том, что это число удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - n = -x$.

Квадратные уравнения $x^2 - n = x$ и $x^2 - n = -x$ имеют одинаковый дискриминант и отрицательное отношение свободного коэффициента и коэффициента при старшей степени переменной. То есть, у каждого из уравнений будет 1 положительный и 1 отрицательный корень. Отрицательный в расчёт не берем.

P.S. Кроме того, «поколдовав» с обобщенной теоремой Виета, можно заметить, что

$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}}} - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \sqrt{n - \dots}}}}} = 1$ для любых натуральных n .

Ответ: да

Г) Вычислите $\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - \dots}}}}$.

Решение: $\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - \dots}}}} = x$. Заметим, что $x^3 - 12 = -2x$, откуда $(x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0$. Корнем этого уравнения будет число 2.

$\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - 2\sqrt[3]{12 - \dots}}}} = 2$.

Ответ: 2.